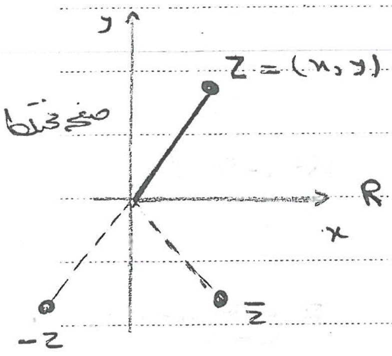
« اعداد مختلط »

Subject
Date

دیف معمولی

$y'' + y = 0 \longrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \longrightarrow \lambda^2 = -1 \qquad i^2 = -1$



$z = (x, y) = x + iy$

✓ قسمت های حقیقی باهم جمع می شوند و قسمت ها موهومی باهم

✓ ضرب اعداد مختلط مانند ضرب بردارهاست

مزدوج $\bar{z} = x - iy$

$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \qquad \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$

$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$

$$\begin{cases} z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 \\ z + \bar{z} = 2x \\ z - \bar{z} = 2yi \end{cases}$$

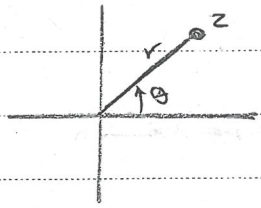
قدر مطلق $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \qquad |z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad |z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|$

$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

فرم قطبی - نمایی



$$\begin{cases} z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \quad , \quad \theta = tg^{-1}\, y/x \end{cases}$$ فرم قطبی

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad z = re^{i\theta}$ فرم نمایی

فرمول اویلر $\qquad r = |z|$

θ : آرگومان $\theta = \arg(z)$ (یک کمیت چند مقداری است)

$z = re^{i\theta} = re^{i(\theta \pm 2k\pi)}$

Subject
Date

* آرگومان اصلی : یک کمیت تک مقداری است $-\pi \leq \theta \leq \pi$

$Arg(z)$

$$arg(z) = Arg(z) \pm 2k\pi$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \qquad z_1 / z_2 = r_1 / r_2 \, e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

* توان عدد صحیح : (z^n)

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

اندازه به توان n می رسد

آرگومان n برابر می شود

* فرمول دموآور : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\cos\theta \sin\theta$$

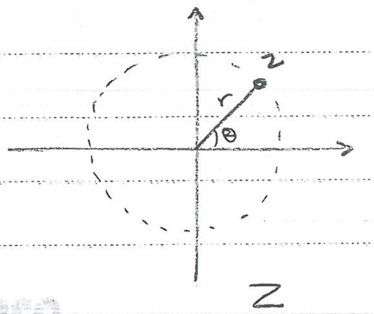
* ریشه عدد مختلط : $(z^{\frac{1}{n}})$

$$W = z^{\frac{1}{n}} \Rightarrow z = W^n$$

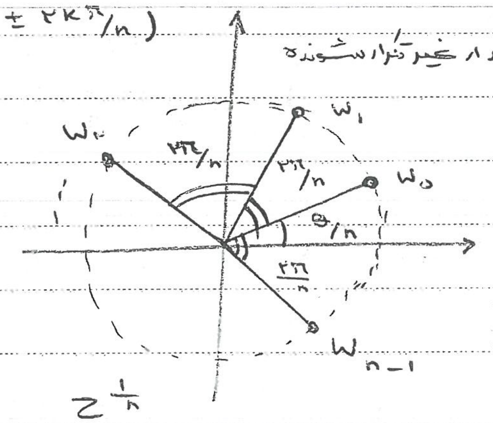
n تا جواب

$$z = re^{i\theta} = re^{i(\theta \pm 2k\pi)}$$ یک مقدار غیر تکرار شونده

$$W = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\theta/n \pm 2k\pi/n)}$$ n مقدار غیر تکرار شونده



Z



$z^{\frac{1}{n}}$

$$W_k = r^{1/n} e^{i(\theta/n + 2k\pi/n)}$$

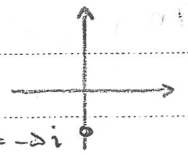
$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

n ریشه مجزا

$$z^{1/n} = w_k = r^{1/n} e^{i\left(\theta/n + 2k\pi/n\right)}, \quad k = 0, 1, \ldots, (n-1)$$

n ریشه مجزا

ریشه های چهارم $z=5i$ را بدست آورید



$z=-5i$

$$(-5i)^{\frac{1}{4}} = ?$$

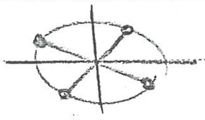
اول باید به فرم نمایی ببریم

$$z = 5e^{-\frac{\pi}{2}i} = 5e^{3\pi/2\, i}$$

$$\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{4}\right) \rightarrow \frac{3\pi}{8}$$

$$w_0 = 5^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi}{8}i} \qquad w_1 = 5^{\frac{1}{4}} e^{\frac{3\pi}{8}i}$$

$$w_2 = 5^{\frac{1}{4}} e^{\frac{7\pi}{8}i} \qquad w_3 = 5^{\frac{1}{4}} e^{\frac{11\pi}{8}i}$$



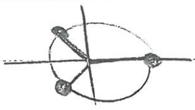
ریشه های سوم و چهارم $z=1$ را بدست آورید

$$z = 1e^{0i}$$

ریشه های سوم

$$\begin{cases} w_k = 1^{1/3} e^{\left(0/3 + 2k\pi/3\right)i} \\ k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_1 = e^{2\pi/3\, i} \\ w_2 = e^{4\pi/3\, i} \end{cases}$$

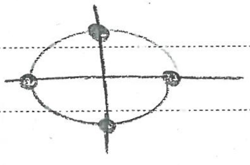


ریشه های چهارم

$$\begin{cases} w_k = 1e^{\left(\frac{2k\pi}{4} i\right)} \\ k = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_1 = e^{\pi/2\, i} = i \\ w_2 = e^{\pi i} = -1 \\ w_3 = e^{3\pi/2\, i} = -i \end{cases}$$

مجموع ریشه های یک همیشه صفر است،
یکی از ریشه ها حتماً یک است



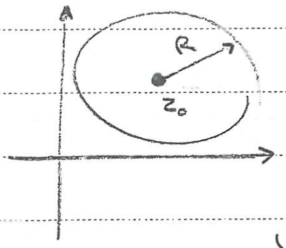
اگر یکی از ریشه ها یک عدد حقیقی باشد، مزدوج ریشه خودش نیز ریشه است

Subject
Date

* توان کسری گویا ($z^{p/n}$)

$$z^{p/n} = (z^p)^{\frac{1}{n}} = (r^p e^{ip\theta})^{1/n}$$

ریشه n ام



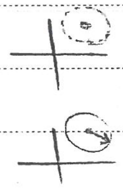
\# نواحی مختلف صفحه مختلط

۱) دایره

$z_0 = x_0 + i y_0$

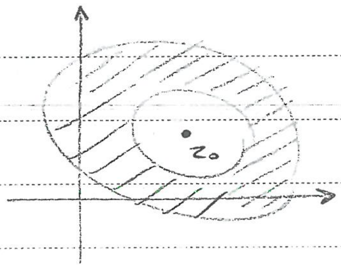
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$

$|z-z_0| = R$



داخل دایره:
- دایره باز $|z-z_0| < R$
- دایره بسته $|z-z_0| \le R$

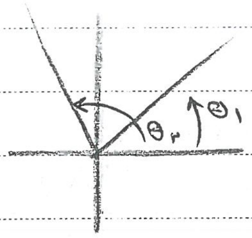
خارج دایره $|z-z_0| > R$



۲) حلقه دایره ای (Annulus)

حلقه بسته $R_1 \le |z-z_0| \le R_2$

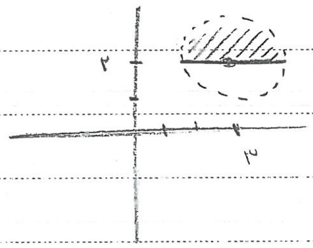
حلقه باز $R_1 < |z-z_0| < R_2$



۳) خطوط arg ثابت

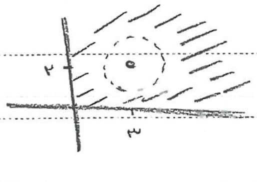
مثلاً: (فاصله z تا (۳,۲) کمتر از ۱)

$$\begin{cases} |z-(3+2i)| < 1 \\ Im(z) \ge 2 \end{cases}$$



ج)

$$\begin{cases} |z-(3+2i)| > 1 \\ 0 \le Arg(z) \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



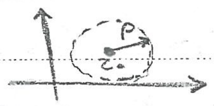
Subject
Date

مجموعه نقاط : مجموعه‌ای متناهی یا نامتناهی از نقاط را مجموعه نقاط گویند (Point set)

مجموعه کراندار : اگر اندازه همه نقاط کوچکتر از M باشد $|z| \le M$ مثلاً داخل دایره

همسایگی : به همه نقاط یک دایره باز به مرکز z_0 و شعاع ρ، همسایگی z_0 به شعاع ρ گوییم

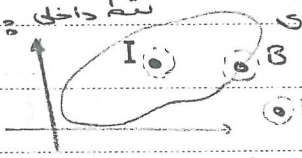
$|z-z_0|<\rho$



(انواع نقاط یک مجموعه نقاط)

نقطه مرزی : هر همسایگی از آن هم نقطه داخلی هم خارجی دارد

نقطه داخلی : حداقل یک همسایگی دارد که همه نقاطش عضو مجموعه است

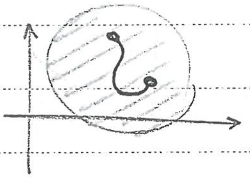


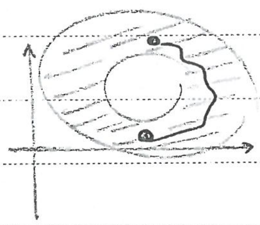
نقطه خارجی : حداقل یک همسایگی دارد که هیچ یک از نقاط آن عضو مجموعه نیست

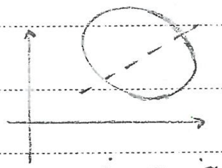
مجموعه باز : مجموعه‌ای که همه نقاط آن، نقطه داخلی باشد. نقطه مرزی - مرز - ندارد

مجموعه بسته : مجموعه با وجود مرز - هر مجموعه با نقاط داخلی و مرزی

مجموعه همبند (connected) : اگر هر دو نقطه آن را بتوان با خط بدون خارج شدن از مجموعه به هم وصل کرد







غیر همبند

در دایره بودن نقطه

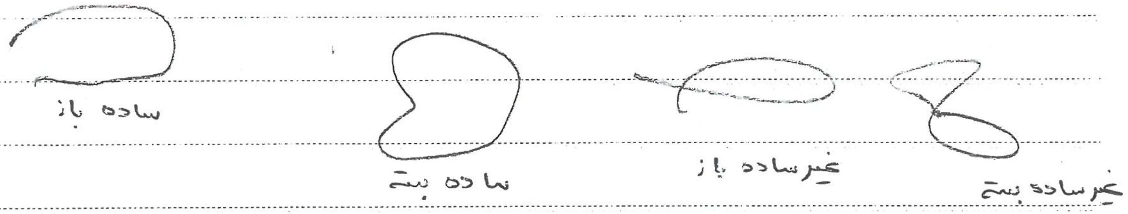
دامنه (Domain) : مجموعه همبند و باز : open connected set

مثال دایره باز ← ($|z-z_0|<R$)

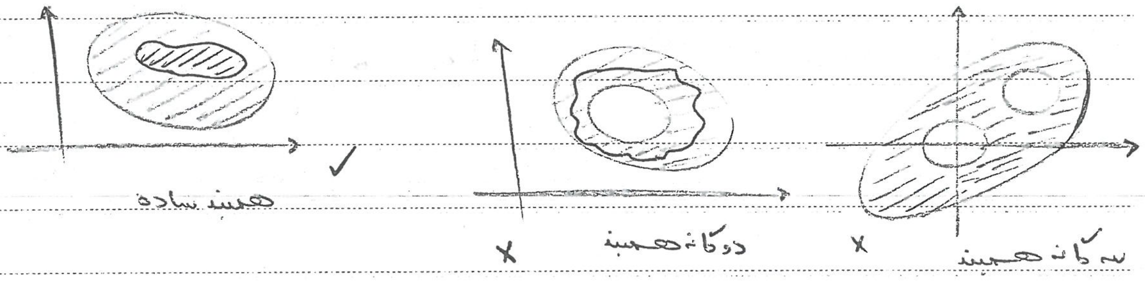
ناحیه (Region) : دامنه با وجود مرز یا قسمتی از مرز ($|z-z_0|\le R$)

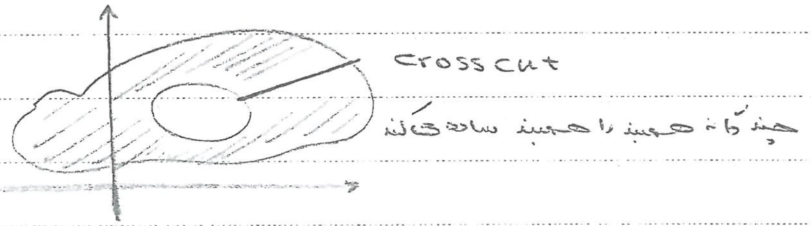
← مثال دایره بسته

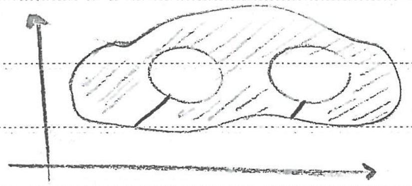
✓ منحنی ساده: منحنی ای که خودش را قطع نکند یا به خودش مماس نباشد مگر به هم برسد



✓ مجموعه همبند ساده: یک مجموعه همبند را ساده می‌گوییم هرگاه هر منحنی ساده بسته در آن رسم کنیم همه نقاط داخل آن منحنی عضو مجموعه باشد







«توابع مختلط»

تابع حقیقی: ضابطه ای که به هر x یک و تنها یک y نظیر کند

* تابع مختلط: ضابطه ای که به هر عدد مختلط یک یا چند مقدار نظیر کند

$$W = f(z) = u + iv = f(x+iy)$$

$z \to x+iy$ ، $u \to$ قسمت حقیقی تابع مختلط است ، $v \to$ قسمت موهومی تابع مختلط است

$u(x,y)$ ، $v(x,y)$ } دو تابع حقیقی که اجزای حقیقی و موهومی تابع مختلط است

یا { $u(r,\theta)$ ، $v(r,\theta)$

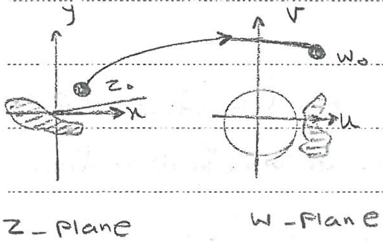
(عدد مختلط ، عدد مختلط)

$$f(z) = 4z + 3 = 4(x+iy) + 3 = \underbrace{(4x+3)}_{u(x,y)} + \underbrace{(4y)}_{v(x,y)}i$$

$$f(z) = (5i)z + z + i = 5i(x+iy) + x + iy + i = \underbrace{(x-5y)}_{u} + \underbrace{(5x+y+1)}_{v}i$$

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{(x^2-y^2)}_{u} + \underbrace{(2xy)}_{v}i$$

$$= (r^2\cos 2\theta) + (r^2 \sin 2\theta)i = Re^{i\phi}$$



نگاشت (Mapping):

چه نگاشت ناحیه را تحت تابع زیر به دست آورید

$$f(z) = 2z + i$$

$|Re\, z| \le 1$

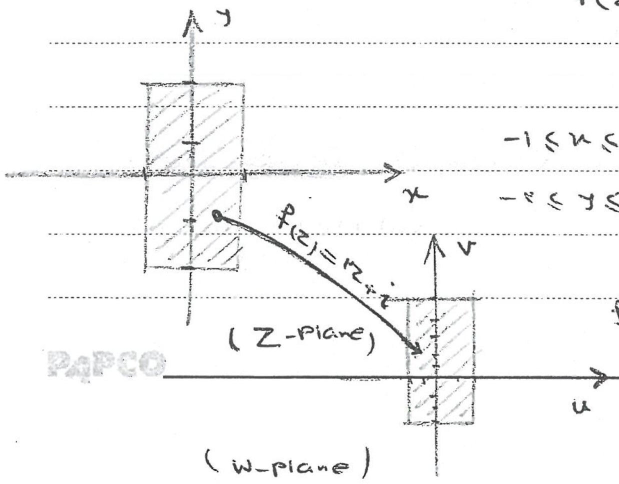
$|Im(z)| \le 2$

انبساط و انتقال

⇓

$-1 \le x \le 1$ ، $|x| \le 1$

$-2 \le y \le 2$ ، $|y| \le 2$



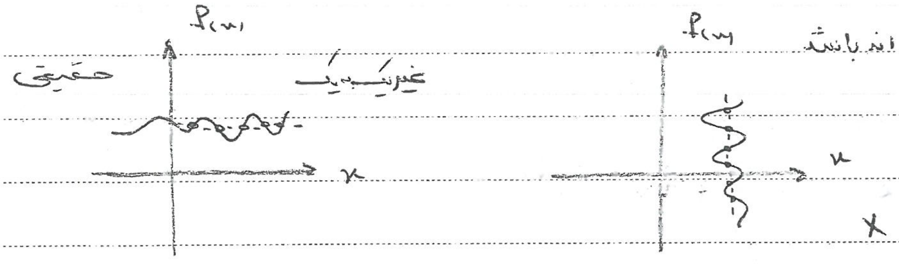
$$f(z) = 2(x+iy) + i = \underbrace{(2x)}_{u} + \underbrace{(2y+1)}_{v}i$$

$-2 \le u \le 2$

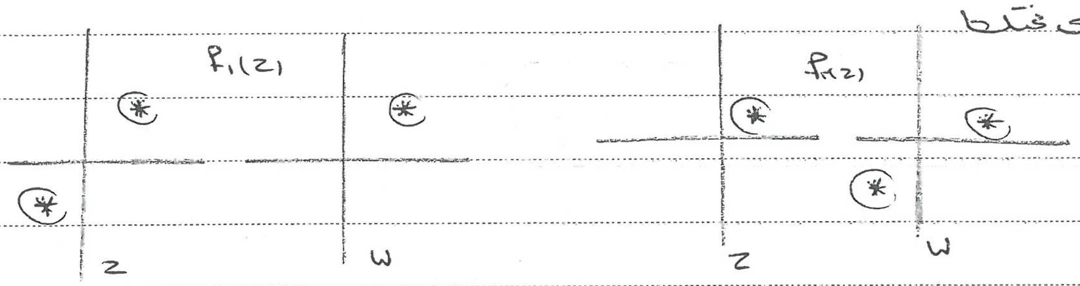
$-3 \le v \le 5$

Subject
Date

تابع حقیقی چند مقداری نمی تواند باشد



اما در دنیای مختلط

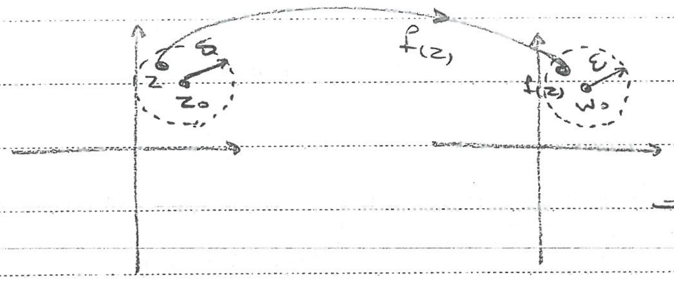


غیر یک به یک — چند مقداری

« limit حد »

می گوییم تابع $f(z)$ در z_0 دارای حد w_0 است هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta(\varepsilon) > 0$ موجود باشد به گونه ای که

$$\text{for } z \neq z_0 \quad \text{if } |z - z_0| < \delta \rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

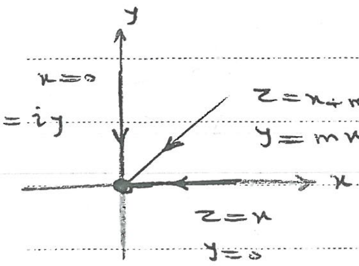


اگر z در همسایگی z_0 باشد
$f(z)$ در همسایگی w_0 تحت نگاشت
$f(z)$
می گوییم تابع در z_0 دارای حد w_0 است

$$W_0 = \lim_{z \to z_0} f(z)$$

از جهت های مختلف (مسیرهای مختلف)
باید مقدار حد برابر باشد

Subject
Date



آیا تابع $f(z)=\left(\dfrac{x^2+y^2}{(x+y)^2}\right)^{+0i}$ در $z_0=0^{+0i}$ حد دارد؟

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ x,y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+m x^2}{(x+mx)^2} = \frac{1+m^2}{(1+m)^2}$$

$y=mx$

به ازای m های مختلف، مقادیر حد متفاوت است

پس تابع در $z=0$ حد ندارد

«پیوستگی»

تابع $f(z)$ در z_0 پیوسته است هرگاه $f(z)$ در z_0 موجود و $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

← اگر f و g پیوسته باشند، $f\pm g$ و fg و f/g و fog پیوسته است

← شرط لازم و کامل برای پیوستگی $f(z)$، پیوستگی توابع حقیقی دو متغیره u و v است

$f=u+iv$

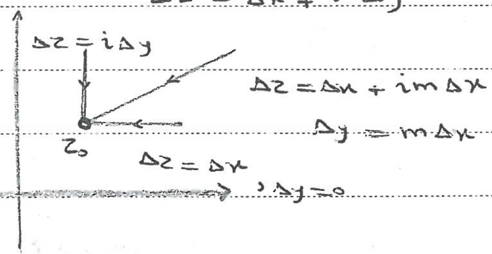
«مشتق»

$$f'(z)=\frac{df(z)}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

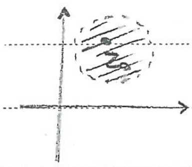
$z=x+iy$

$\Delta z=\Delta x+i\,\Delta y$

اگر حد فوق در نقطهٔ z_0 روی همهٔ مسیرها موجود و برابر باشد f را در z_0 مشتق‌پذیر گوییم



* تابع تحلیلی: اگر مشتق تابع $f(z)$ در نقطهٔ z_0 و در نقاط حداقل یک همسایگی آن موجود باشد

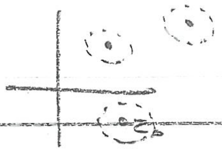


* نقطهٔ تکین: اگر $f(z)$ در z_0 مشتق‌پذیر نباشد اما در همسایگی آن شامل نقاط تحلیلی هم باشد

Subject

Date اگر $f(z)$ در z_0 مشتق پذیر نباشد

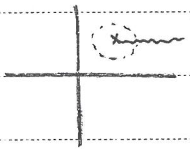
اما حداقل یک همسایگی پیدا کنیم که شامل نقاط تحلیلی باشد



نقاط تکین: تکین تنها — Isolated Singular point

تکین گسترده — Distributed Singular point

نمی توان همسایگی پیدا کرد که جز خودش شامل نقاط مشتق پذیر نباشد



* تابع تام Entire: در همه جای صفحه مختلط مشتق پذیر باشد

«قوانین مشتق»

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f(g(z)))' = f'(g(z))\, g'(z)$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(z^n)' = n z^{n-1}$$

$$(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

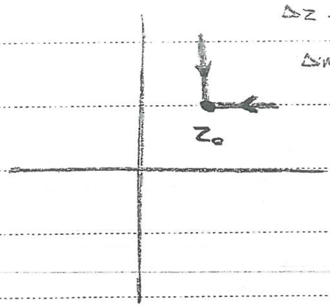
$$(f^n_{(z)})' = n f^{n-1}(z)\, f'(z)$$

م

$$f(z) = z^2$$

$$\lim_{\Delta z \to 0+0i} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$

$\Delta x, \Delta y \to 0$



$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + \Delta z^2 - z^2}{\Delta z} = 2z$$

$$\Rightarrow f'(z_0) = 2z_0$$

دامنه به مسیر نیست

مشتق موجود است

نقطه تکین هم ندارد

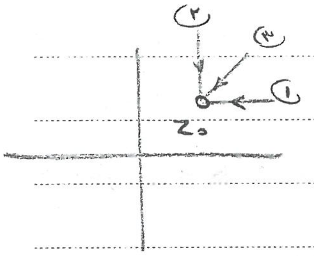
تابع تام است

ج) $f(z) = Re(z) = x$ در هیچ جا مشتق‌پذیر نیست

ج) $f(z) = \bar{z} = (x - iy)$ در هیچ جا مشتق‌پذیر نیست

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{f(x+iy+\Delta x+i\Delta y) - f(x+iy)}{\Delta x + i\Delta y}$$

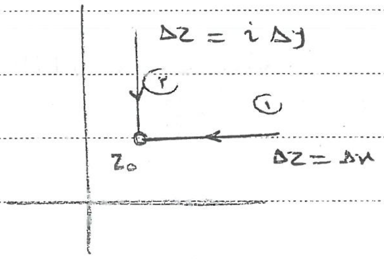
$$= \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{x - iy + \Delta x - i\Delta y - (x - iy)}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$



مسیر ① $\Delta y = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$

مسیر ② $\Delta x = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1$

مسیر ③ $\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - im\Delta x}{\Delta x + im\Delta x} = \frac{1 - im}{1 + im}$ وابسته به m — در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست



«معادلات کوشی-ریمان»

شرط برابری مشتق روی مسیر ① و ② = شرط لازم برای مشتق‌پذیر بودن f در z_0

⇓

نتیجه: ۲ معادله کوشی-ریمان

بعد با یک تغییر شرط لازم را به لازم و کافی تبدیل می‌کنیم

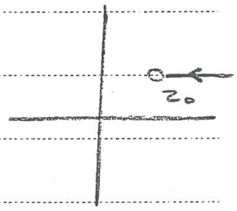
Subject
Date

$$f' = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \qquad f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$f' = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) + i v(x+\Delta x, y+\Delta y)] - [u(x,y) + i v(x,y)]}{\Delta x + i \Delta y}$$

۱) مسیر $\Delta Z = \Delta x$

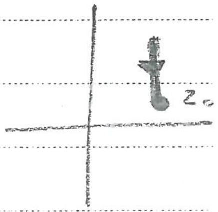
$$f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} \quad (\Delta y = 0)$$



$$\Rightarrow f'(z) = u_x + i v_x$$

۲) مسیر $\Delta Z = i \Delta y$

$$f' = -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i \Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i \Delta y}$$



$$\Rightarrow f'(z) = v_y - i u_y$$

* شرط لازم برای وجود مشتق

$$u_x + i v_x = v_y - i u_y$$

معادلات کوشی ـ ریمان

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Subject
Date

قضیه : در تابع $(f(z)=u+iv)$ اگر u و v و مشتقات v_y و v_x و u_y و u_x در ناحیه R پیوسته باشند آنگاه معادلات کوشی ریمان شرط لازم و کافی برای تحلیلی بودن f در R است

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$ f , f' پیوسته باشند

ج) $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{(x^2-y^2)}_{u} + \underbrace{(2xy)}_{v}\, i$

u و v و مشتقات در تمام صفحه پیوسته است

$$\begin{cases} (u_x = 2x) = (v_y = 2x) \checkmark \\ (u_y = -2y) = (-v_x = -2y) \checkmark \end{cases}$$

پس تابع تام است و همه جا تحلیلی است

نقطه تکین ندارد

ج) $f(z) = \bar{z} = x - iy$

$$\begin{cases} u_x = 1 \neq v_y = -1 \\ u_y = 0 = -v_x = 0 \end{cases}$$

در هیچ جا مشتق پذیر نیست

و تحلیلی نیست

در پیوستگی هم مشکلی ندارد

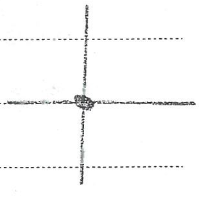
نقطه تکین ندارد

ج) $f(z) = z\bar{z} = |z|^2 = \underbrace{(x^2+y^2)}_{u} + \underbrace{0}_{v}\, i$

$$\begin{cases} u_x = 2x \neq v_y = 0 \\ u_y = 2y \neq -v_x = 0 \end{cases}$$

فقط در $z=0$ معادلات کوشی ریمان برقرار است $(0+0i)$ مشکل پیوستگی نداریم

نقطه تحلیلی و تکین ندارد



تابع فقط در نقطه $z = 0+0i$ مشتق پذیر است

PAPCO

Subject
Date

ج) $f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}\times\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$

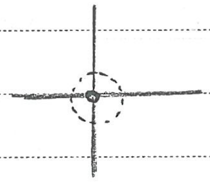
$$\Rightarrow f(z)=\underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{u}+\left(\underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{v}\right)i$$

تابع نقطه در $z=0$ مشتق پذیر نیست

منتها در $z=0+0i$ پیوستگی نداریم

$$\begin{cases} u_x=v_y & \text{در همه نقاط} \\ u_y=-v_x & \text{در همه نقاط} \end{cases}$$

همه جا تحلیلی است به جز $z=0$ نقطه تکین منفرد



* در توابع $\frac{p(z)}{q(z)}$ که $p(z)$ و $q(z)$ خودشان تکین ندارند، تابع در ریشه های مخرج تکین تنها دارد

$\frac{1}{z^2+1}\Rightarrow z=\pm i$ نقاط تکین تنها

«خاصیت تابع تحلیلی»

اگر $f(z)=u+iv$ در ناحیه R تحلیلی باشد آنگاه u و v دارای مشتق های دوم پیوسته است که در لاپلاس صدق می کند

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & \nabla^2 u=0 \\ v_{xx}+v_{yy}=0 & \nabla^2 v=0 \end{cases}$$

* تابع همساز (هارمونیک): تابعی که مشتق دوم جزئی پیوسته دارد و در لاپلاس صدق می کند
* مزدوج هارمونیک: به u و v همساز که ترم های تابع تحلیلی باشند گوییم مزدوج همساز

$$\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases}$$

Subject
Date

* اگر u ترم f باشد ثابت کنید همساز است و مزدوج هارمونیک آن را بیابید. $u(x,y) = x^2 - y^2 - y$

لاپلاس صدق می‌کند، مشتقات دوم پیوسته است

$u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0$ ✓

$f(z) = u + iv$ تحلیلی $\xrightarrow{\text{کوشی - ریمان}}$
$$\begin{cases} u_x = v_y \Rightarrow 2x = v_y \\ v = \int 2x\,dy + k(x) = 2xy + k(x) \\ u_y = -v_x \Rightarrow -2y - 1 = -2y - k' \end{cases}$$

$k' = 1 \longrightarrow k(x) = x + C$

$\Rightarrow v(x,y) = 2xy + x + C$

ممکن است اینجا به ODE بر بخوریم — مزدوج هارمونیک

«نگاشت»

۱) تابع $f(z) = Az + B$ که A و B ثابت مختلط هستند

- تک مقداری است (یک نقطه روی صفحه z را به یک نقطه روی صفحه w می‌برد)
- یک به یک است (یک نقطه روی صفحه w متناظر یک نقطه روی صفحه z است)
- تام است (نقطه تکین ندارد)

✓ انبساط و انقباض می‌دهد، دوران می‌دهد، جابجا می‌کند
(با حفظ شکل)

انبساط - انقباض
دوران } (با حفظ شکل)
جابجایی

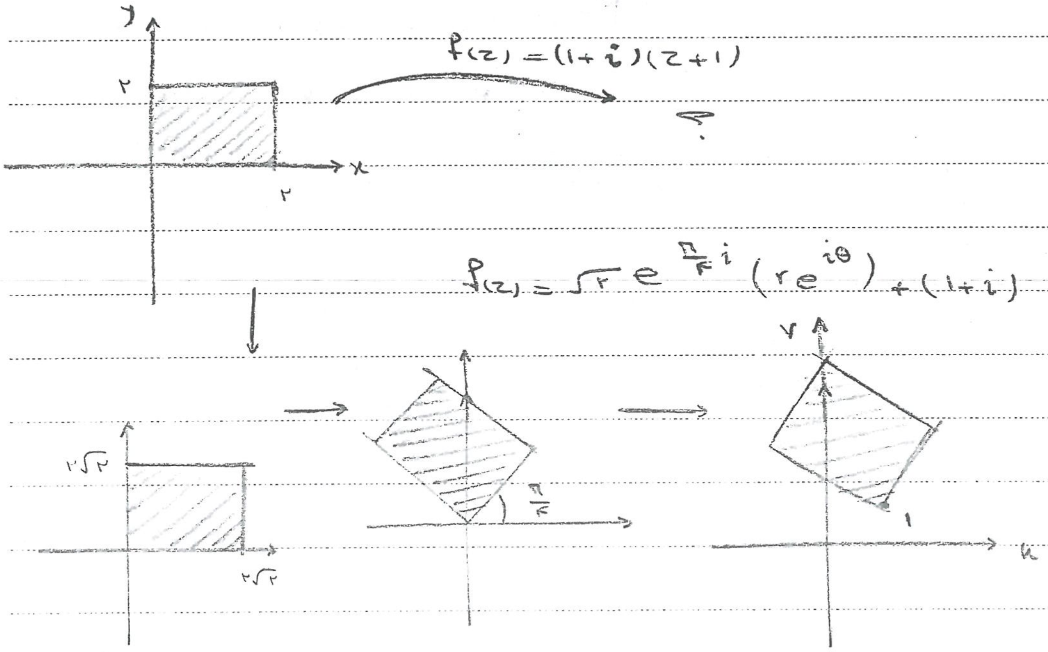
Subject
Date

$$f(z) = \underbrace{[a e^{i\alpha}]}_{A} \underbrace{(re^{i\theta})}_{z} + \underbrace{(b_0 + ib_1)}_{B}$$

$$f(z) = \underbrace{ar}_{\text{انبساط - انقباض}} \underbrace{e^{i(\theta+\alpha)}}_{\text{دوران}} + \underbrace{(b_0 + ib_1)}_{\text{انتقال}}$$

ج.

$f(z) = (1+i)(z+1)$



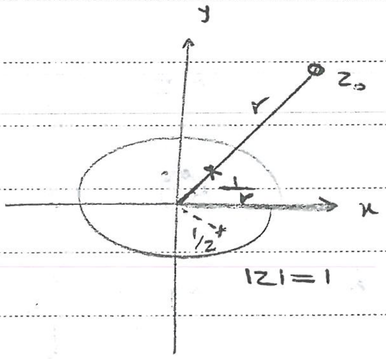
۲) تابع $f(z) = \frac{1}{z}$

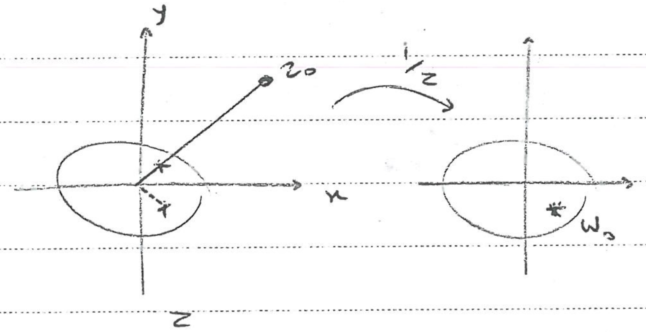
- تک مقداری
- یک به یک
- تام نیست $z=0$ تکین

Subject
Date

$$f(z) = \frac{1}{z} \qquad z = x + iy = re^{i\theta}$$

$$f(z) = \frac{1}{r} e^{-i\theta} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} i$$





$\frac{1}{z}$ خط و دایره را بهم نگاشت می‌کند

$$A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0 \longrightarrow \begin{cases} A = 0 & \text{خط} \\ D = 0 & \text{خط یا دایره از مبدأ عبور می‌کند} \end{cases}$$

معادله‌ی خط و دایره در صفحه z

$$z\bar{z} = x^2+y^2 \qquad x = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$\left(Az\bar{z} + B\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + C\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + D = 0 \right) \times w\bar{w}$$

$$w = f(z) = \frac{1}{z} \Rightarrow wz = 1 \ , \ \bar{w}\bar{z} = 1$$

$$A + B\left(\frac{\bar{w}+w}{2}\right) + C\left(\frac{\bar{w}-w}{2i}\right) + Dw\bar{w} = 0$$

$$\xrightarrow{w = u + iv} \quad A + Bu - Cv + D(u^2+v^2) = 0$$

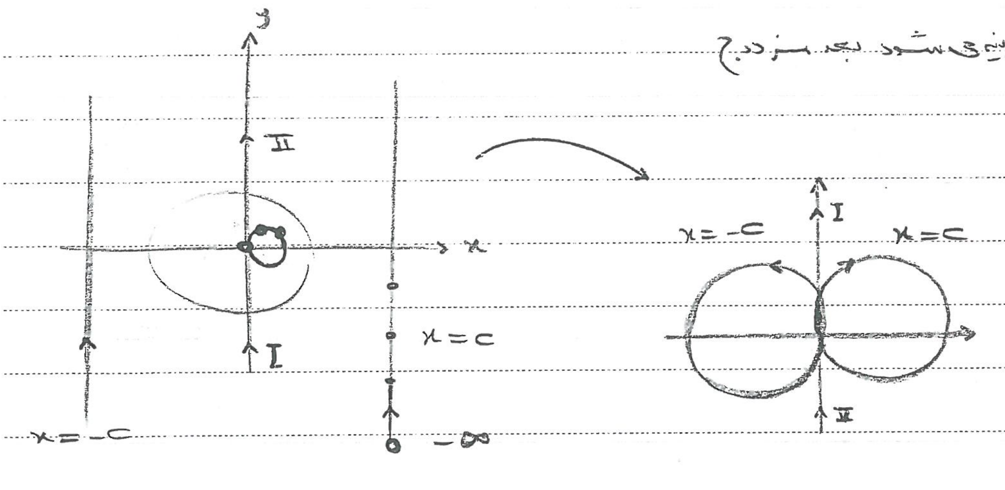
	z	w
$A=0$, $D=0$	خط گذرا از مبدأ	خط گذرا از مبدأ
$A=0$	خط ناگذرا از مبدأ	دایره گذرا از مبدأ
$D=0$	دایره گذرا از مبدأ	خط غیرگذرا از مبدأ

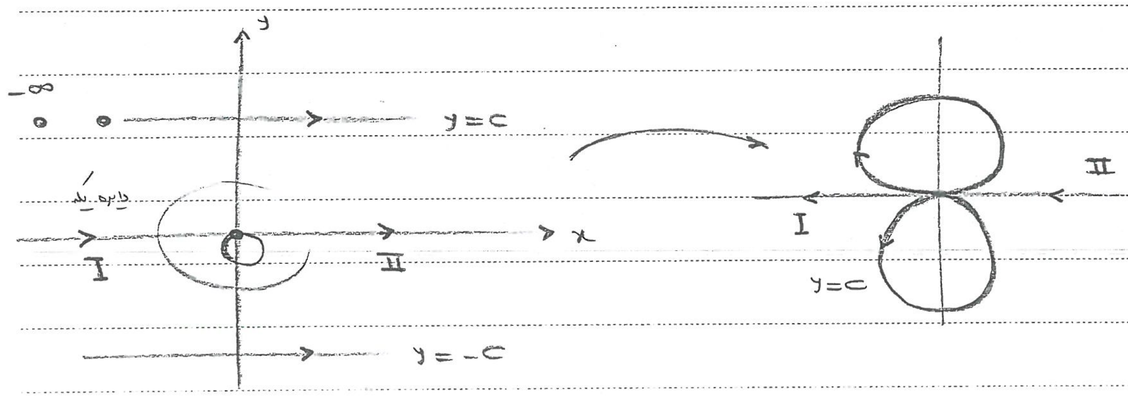
PAPCO

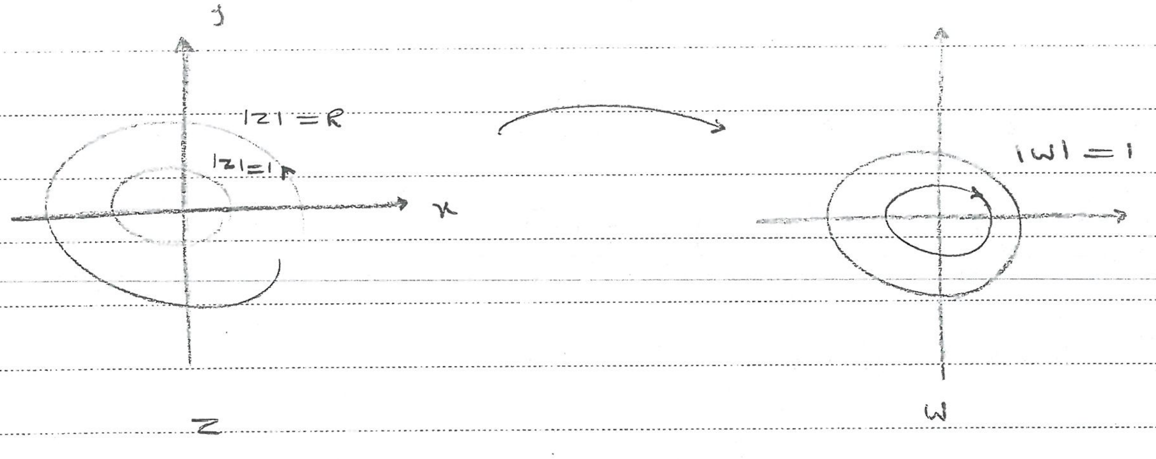
Subject

Date

ابتدا نسبت به دایره یک قرینه می‌شود بعد مزدوج







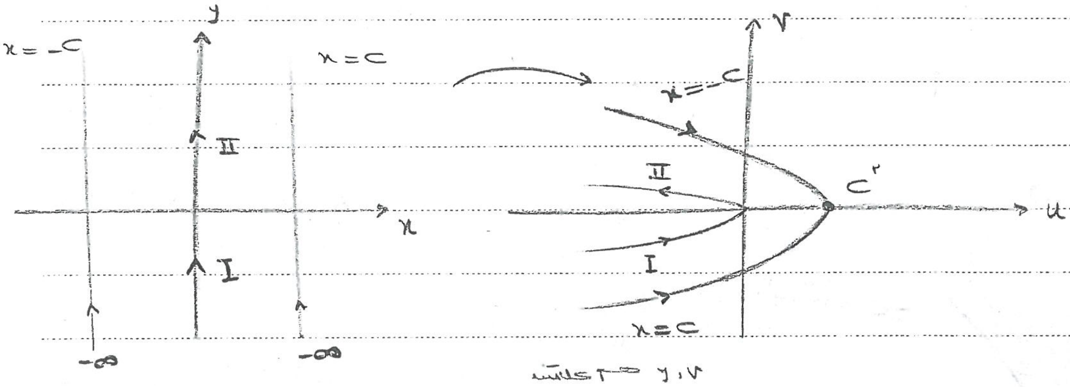
Subject
Date

۳) تابع $f(z)=z^2$

$f(z)=r^2e^{2i\theta}$

$=(x^2-y^2)+2xy\,i$

- یکستاری
- یک به یک نیست
- تام



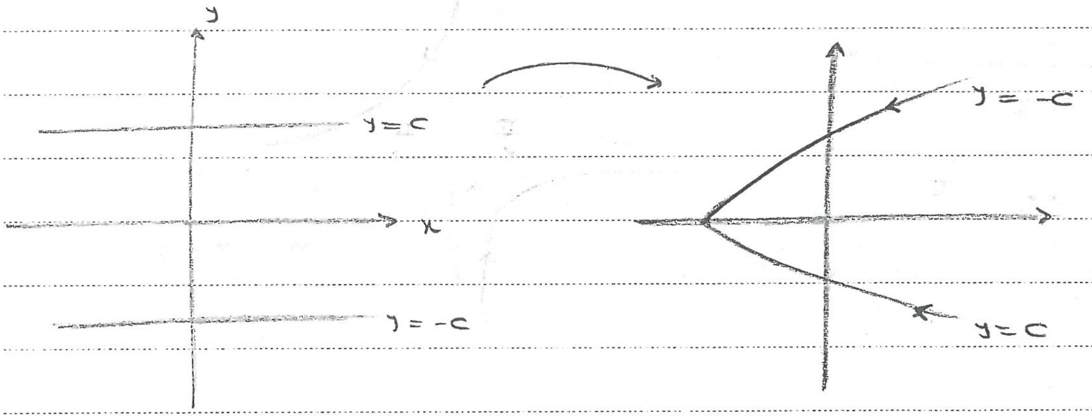
v، y هم‌علامت

y مثبت ← v مثبت

$$\begin{cases} u=(c^2-y^2) \\ v=\pm 2cy \end{cases}$$

↓

$u=c^2-\dfrac{v^2}{4c^2}$ سهمی



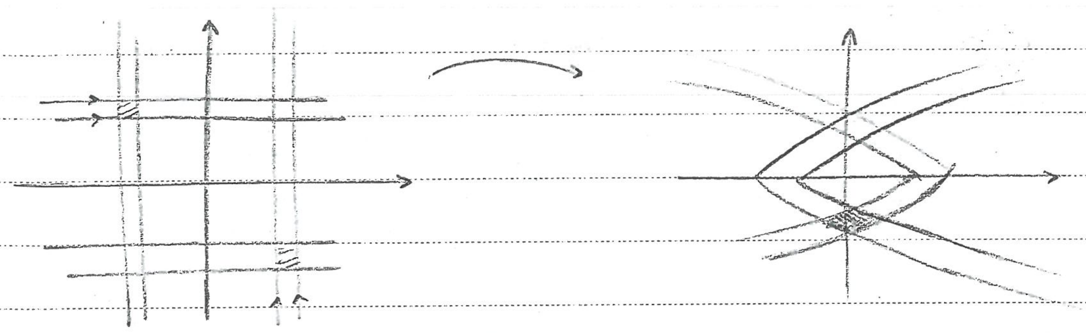
$$\begin{cases} u=x^2-c^2 \\ v=2cx \end{cases}$$

$u=\dfrac{v^2}{4c^2}-c^2$

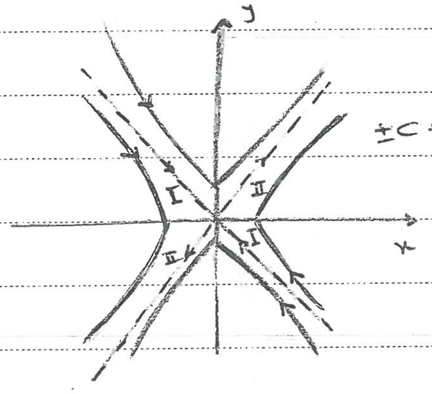
PAPCO

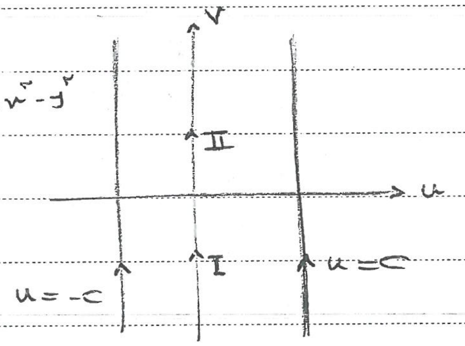
Subject

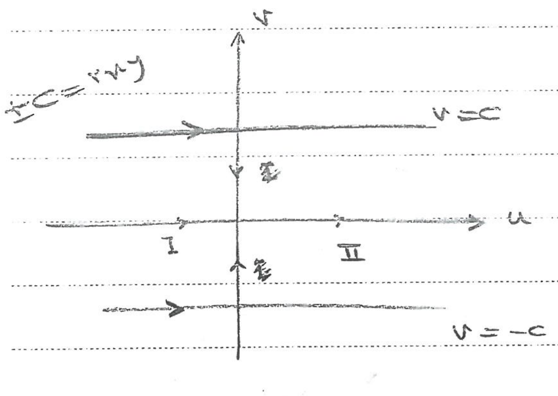
Date

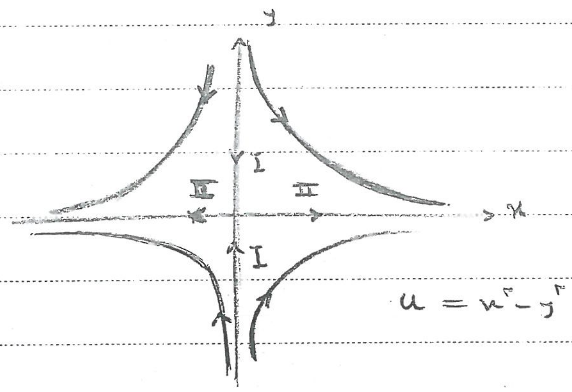


خطوط اصلی در w :









Subject
Date

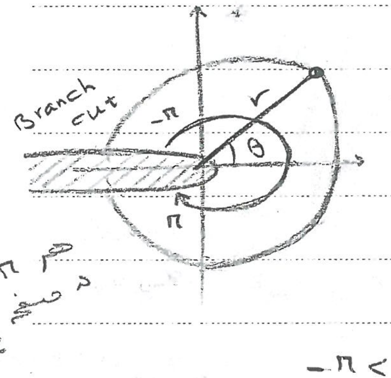
۴) تابع $f(z)=z^{\frac{1}{2}}$ — تک مقداری نیست (دو مقداری)

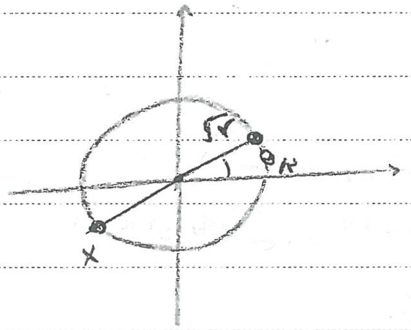
- پیوسته

- تام

$W = z^{\frac{1}{2}}$

$W^2 = z \Rightarrow (u^2 - v^2) + 2vu\,i = x + iy$





تک مقداری می‌شود $-\pi < \theta \leq \pi$

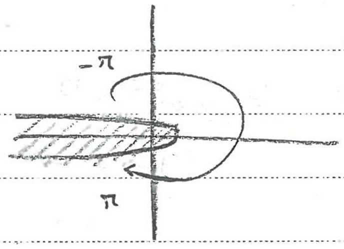
مانعی که روی θ ایجاد کنیم Branch cut

روی موارد زیر خط می‌خورد

تک مقداری می‌شود

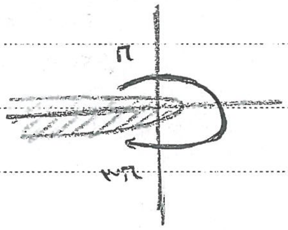
W_0

Branch 1 $\quad -\pi < \theta \leq \pi$



W_1

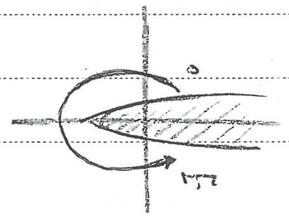
Branch 2

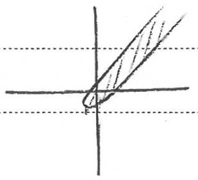


$W_k = r^{1/2} e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right)}$

$k = 1, 2$

$z = re^{i(\theta + 2k\pi)}$





PAPCO

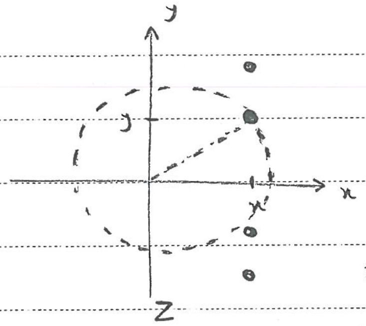
Subject
Date

۵) تابع نمایی $f(z)=e^z=e^{x+iy}$ — تک مقداری

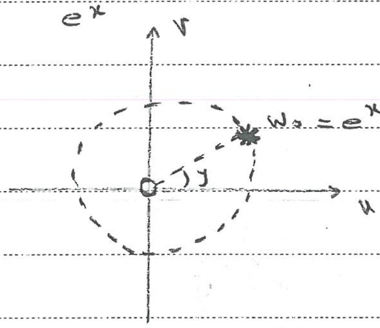
$=e^x e^{iy}$ — غیر یک به یک

— تام

$e^{x+iy}=Re^{i\phi} \to y$, $R \to e^x$



$\xrightarrow{e^z}$



$z=x+iy=re^{i\theta}$

$z=re^{i\theta}=re^{i(\theta\pm 2k\pi)}$

یک نقطه ← یک نقطه چرخ

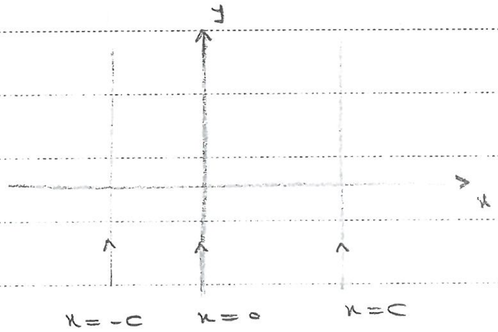
$f(z)=e^z=e^x e^{iy}$

یک نقطه چرخ → ∞ نقطه روی یک خط عمودی

$z=x+i(y\pm 2k\pi)$ $=e^x e^{i(y\pm 2k\pi)}$

اگر بچرخد ← y جابجا می‌شود

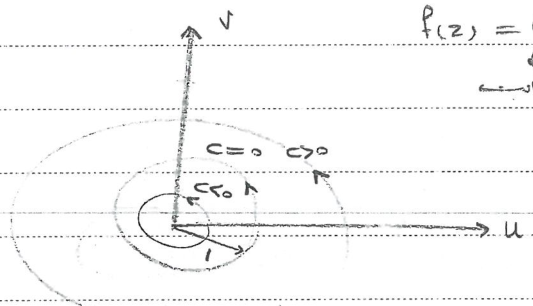
نگاشت $f(z)=e^z$:

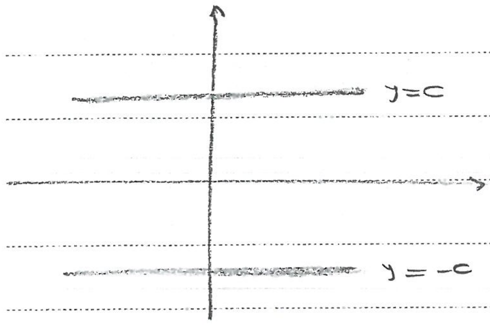


$e^z=e^{\pm c}e^{iy}$

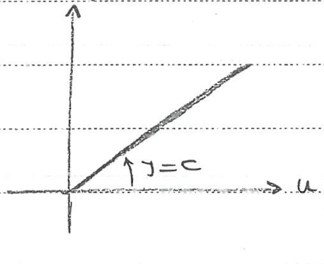
$y \to \infty \to \infty$

$f(z)=Re^{i\phi}$ — R ثابت، دایره





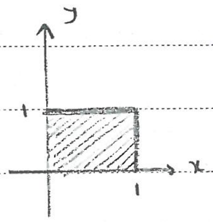
$e^z=e^x e^{ic}$

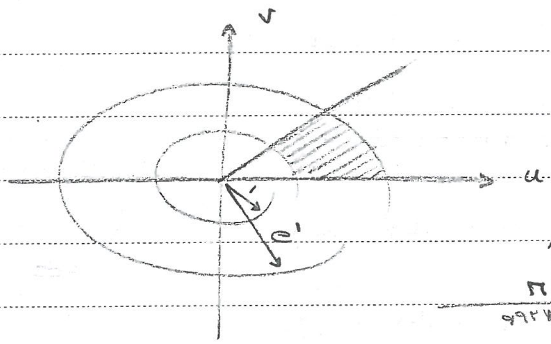


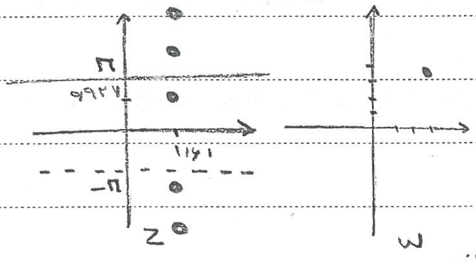
PaPCO

Subject
Date

ج.





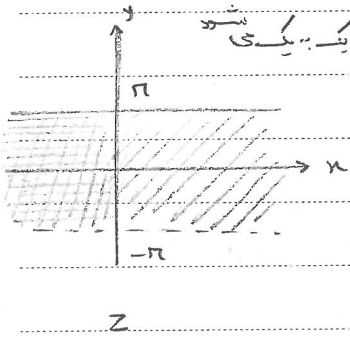


ج. حل کنید

$$\left(f(z) = e^z = 3 + 4i\right) = 5e^{0.927 i}$$

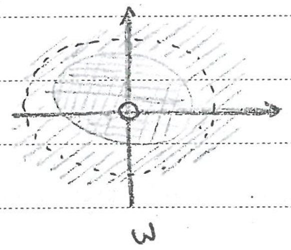
$$e^x e^{i(y \pm 2k\pi)} = 5e^{0.927 i} \Rightarrow \begin{cases} x = \ln 5 = 1.61 \\ y = 0.927 \pm 2k\pi \end{cases}$$

ناحیه بنیادی:



در این نوار تابع یک به یک می‌شود

$-\pi < y \leq \pi$



کل صفحه w پوشش می‌شود

هر دایره فقط یک بار می‌چرخد

۶) توابع مثلثاتی و هذلولوی:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \dots$$

$$(\cos z)' = -\sin z \ , \quad (\sin z)' = \cos z \ , \quad (\cosh z)' = \sinh z$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \ , \ \dots$$

PAPCO

Subject
Date

اندازه sin و cos محدود نیست

$$\begin{cases} \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \\ \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y \\ \sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(iz) = i \sinh z \\ \sinh(iz) = i \sin z \\ \cos(iz) = \cosh z \\ \cosh(iz) = \cos z \end{cases}$$

تفاوت بین e^z و $\sinh z , \cosh z$ با $\sin z , \cos z$

روی خط عمودی حرکت می‌کند — روی خط افقی حرکت می‌کند

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y} e^{ix} = e^{-y} e^{i(x \pm 2k\pi)}$$

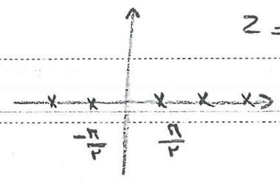
حل کنید؟ $\cos z = 0 + 0i$

راه اول :

$$\underbrace{\cos x \cosh y}_{=0} - i \underbrace{\sin x \sinh y}_{=0} = 0$$

$\cosh y \neq 0$ $\quad \cos x = 0 \to x = \pm \frac{(2n+1)\pi}{2}$ $\quad \sin x \neq 0$ $\quad \sinh y = 0 \to y = 0$

$$z = \pm \frac{(2n+1)\pi}{2} + 0i$$



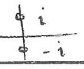
راه دوم :

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0$$

$$e^{iz} = t \Rightarrow \frac{t + 1/t}{2} = 0 \Rightarrow t^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = \pm i$$

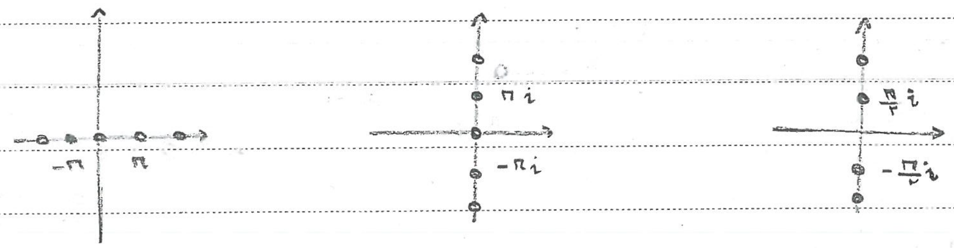
$$e^{iz} = \pm i \Rightarrow e^{-y} e^{ix} = 1 e^{\pm \frac{(2n+1)\pi}{2} i}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm \frac{(2n+1)\pi}{2} \end{cases}$$

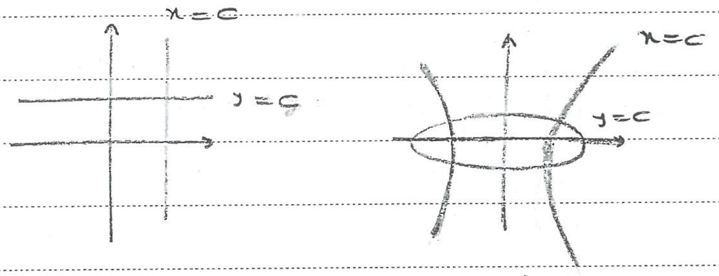
Subject
Date

$\sin z = 0$ $\sinh z = 0$ $\cosh z = 0$ ؟



از روش دوم $\cos z = 3 + 4i$ ؟

(cos z) نگاشت ها



۷) $f(z) = \ln z$ تابع لگاریتم (عکس نمایی) — یک به یک

— ∞ مقداری

— تام

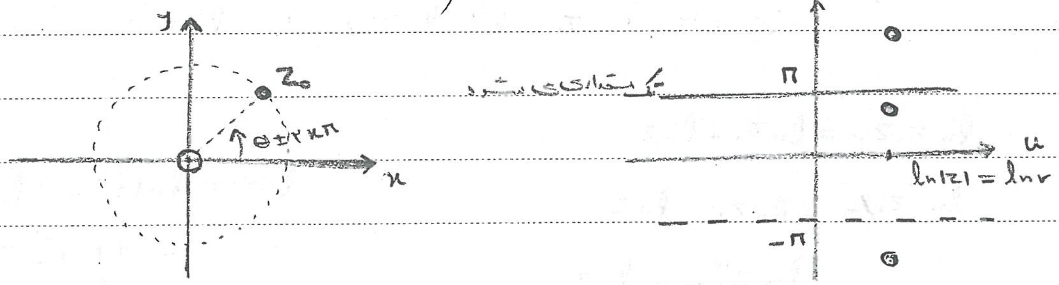
(در z=0 تعریف نشده)

$$\begin{cases} w = f(z) = \ln z = u + iv \\ z = e^{w} \Rightarrow re^{i\theta} = re^{i(\theta \pm 2k\pi)} \end{cases} \qquad w = u + iv \quad e^{u}e^{iv}$$

$$u = \ln r = \ln|z|$$

$$v = \theta \pm 2k\pi$$

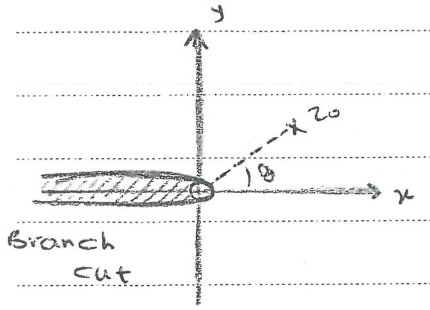
$$\left(w = \ln z = \ln|z| + (\theta \pm 2k\pi)\, i \right)$$

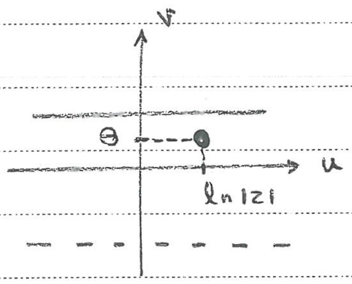


PAPCO

Subject
Date

تک‌مقداری کردن $\ln z$





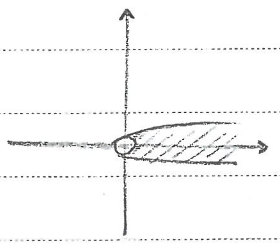
$-\pi < \Theta \le \pi$

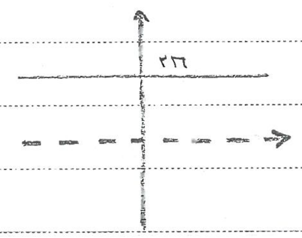
شاخه اصلی

Branch cut اصلی

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + \operatorname{Arg}(z)$$ تک‌مقداری

$$\ln z = \ln|z| + \arg(z) = \operatorname{Ln} z \pm 2k\pi i$$



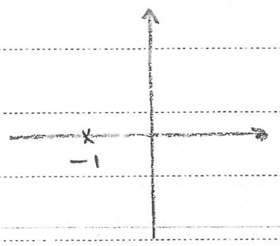


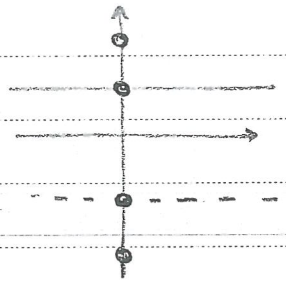
$0 < \Theta \le 2\pi$

$\ln(-1) = ?$ ؟

$$\ln(-1) = \ln|1| + (\pi \pm 2k\pi i)$$

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln|1| + \operatorname{Arg} z = 0 + \pi i$$





* از بین ∞ مقداری که $\ln z_1 z_2$ و یا $\ln z_1/z_2$ و یا $\ln z^m$ دارد یکی هست که:

$$\ln z_1 z_2 = \ln z_1 + \ln z_2$$

$$\ln z_1/z_2 = \ln z_1 - \ln z_2$$

$$\ln z^m = m \ln z$$

$$\ln(-1) = \ln(i^2) = 2 \ln i = 2(\ln 1 + \tfrac{\pi}{2} i) = \pi i$$

Subject
Date

$e^{\ln z} = z \qquad \ln e^{z} = z \pm 2k\pi i$

«توان عمومی عدد مختلط»

$Z^{c} = e^{\ln z^{c}} = e^{c\ln z}$

$Z^{c} = e^{c(\ln r + (\theta \pm 2k\pi) i)} = e^{c\ln r}\, e^{(\theta \pm 2k\pi) c i}$

اگر $c=n$: z^{n} (تک مقداری)

اگر $c=p/n$: $z^{p/n}$ (n مقداری)

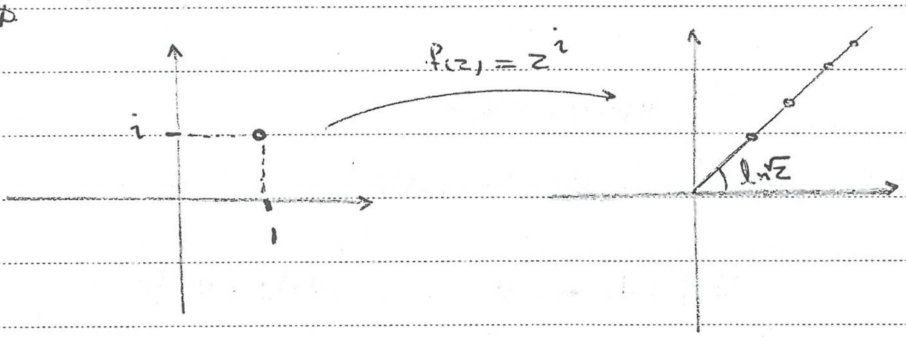
اگر c عدد مختلط یا گنگ : ∞ مقدار

$(1+i)^{i} = e^{\ln(1+i)^{i}} = e^{i\ln(1+i)} = e^{i(\ln\sqrt{2} + (\frac{\pi}{4} \pm 2k\pi) i)}$ ج

$$= e^{i\overbrace{\ln\sqrt{2}}^{\phi}}\underbrace{\left(e^{-(\frac{\pi}{4} \pm 2k\pi)}\right)}_{R}$$

$f(z) = z^{i}$ (۸

$f = u + iv = Re^{i\phi}$



Subject
Date

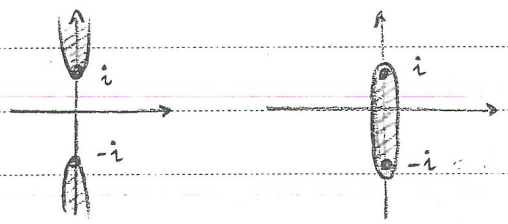
۹) تابع معکوس

$w = \cos^{-1} z$

$$\cos w = z \Rightarrow z = \frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2} \longrightarrow w = \sim$$

$$\cos^{-1} z = -i \ln\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right)$$

$$tg^{-1} z = \frac{i}{2} \ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right) \xrightarrow{\text{تک مقداری}}$$



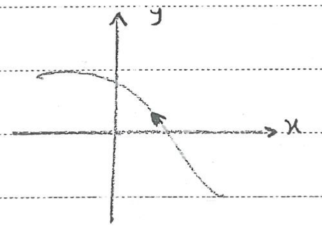
«انتگرال»

تعریف:

اگر C یک منحنی تکه ای هموار باشد

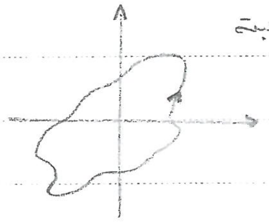
و f(z) روی آن پیوسته باشد

آنگاه چه f(z) تحلیلی باشد چه غیر تحلیلی



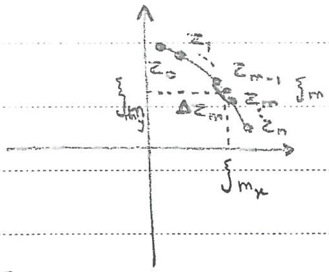
$\int_C f(z)dz$

روی منحنی



روی منحنی بسته

$\oint_{c.c.w} f(z)dz$



$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} f(\xi_m)\Delta z_m$$

اثبات وجود انتگرال:

$u(x,y)$, $v(x,y)$

$$\int_C f(z)dz = \int (u+iv)(dx+idy)$$

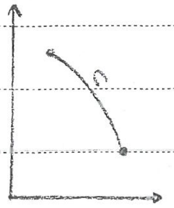
$$= \int u\,dx - v\,dy + i \int u\,dy + v\,dx$$

چون f(z) روی C پیوسته است (لذا u و v پیوسته هستند)

پس دو انتگرال موجود هستند پس $\int f dz$ موجود است

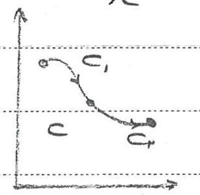
Subject
Date

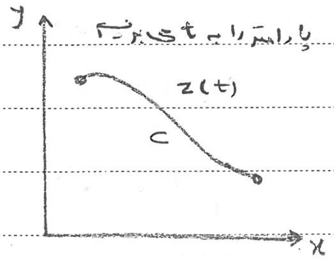
« نحوه محاسبه $\int f(z)\,dz$ » (فرم پارامتری)



$$\int_{z_1}^{z_2} f\,dz = -\int_{z_2}^{z_1} f\,dz$$

$$\int_C f\,dz = \int_{C_1} f\,dz + \int_{C_2} f\,dz$$

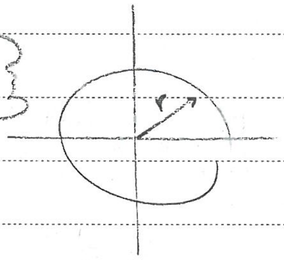




$$\int f(z)\,dz = \int f(z(t))\, z'\, dt$$

$$\frac{dz}{dt} = z'$$

$$z = z(t)$$



$z(t) = re^{it}$

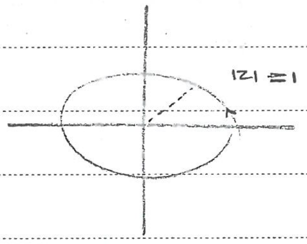
$0 \le t \le 2\pi$

مثال:

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz = ?$$

c.c.w روی دایره واحد

$f(z) = \frac{1}{z}$



$z(t) = e^{it}$

$0 \le t \le 2\pi \Rightarrow$ c.c.w

$z = z(t)$

$z' = \frac{dz}{dt}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{e^{it}}}_{f(z(t))} \underbrace{ie^{it}}_{z'}\,dt = 2\pi i$$

← اگر c.w بود

$$\int_{2\pi}^{0} \sim = -2\pi i$$

PAPCO

Subject

Date

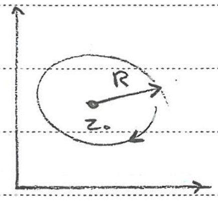
$$\oint (z-z_0)^m \, dz = ?$$

$|z-z_0| = r$

clockwize

(صحیح m)

$$\int f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))\, z'\,dt$$



$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2 \Rightarrow z-z_0 = Re^{it}$

$2\pi \leq t \leq 0$

$$I = \int_{2\pi}^{0} (R^m e^{imt})\, Rie^{it}\,dt$$

$z' = Rie^{it}$

$$= R^{(m+1)}\, i \int_{2\pi}^{0} e^{i(m+1)t}\,dt$$

$$I = i\int_{2\pi}^{0} dt = -2\pi i$$ اگر $m=-1$ ✓

$$\int_{2\pi}^{0} e^{(m+1)ti}\,dt = \int_{2\pi}^{0} \cos(m+1)t + i\sin(m+1)t\,dt$$ اگر $m \neq -1$ ✓

$$= 0 \qquad \Rightarrow I = 0$$

توابع های زیر ۲π پریودیک است

Subject
Date

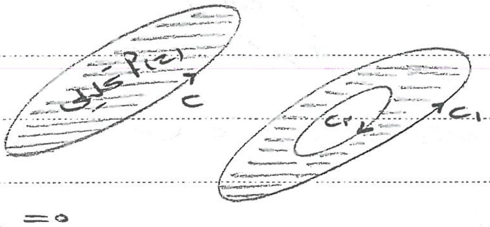
« قضیه انتگرال کوشی »

اگر $f(z)$ در یک ناحیه همبند ساده یا چندگانه همبند، تحلیلی باشد و $f'(z)$ در آن پیوسته باشد:

$$\oint_C f(z)\,dz=0$$

روی مرز

قضیه کوشی گورسات: همان قضیه فوق، بدون شرط $f'(z)$ پیوسته



بین هر دو منحنی بسته اگر تحلیلی باشد، جمع انتگرال‌ها صفر است

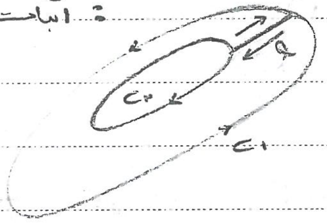
$$\oint_C f(z)\,dz=0$$

$$\oint_C f\,dz=\int_{C_1} f(z)\,dz+\int_{C_2} f(z)\,dz=0$$

C_1: c.c.w ، C_2: c.w

جهت مثبت انتگرال‌گیری

اثبات:



$$\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{\ell}-\int_{\ell}=0$$

C_1: c.c.w ، C_2: c.w

دقت کنید روی مرز قدم می‌زنیم، ناحیه در سمت چپ ما باشد

بیرونی c.c.w

درونی c.w

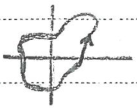
تعمیم به چندگانه همبند

مثال:

$$\oint_{c.c.w} \sin z\,dz=0$$

$\sin z$ تابع تام است

در هر جا داخلش تحلیلی است



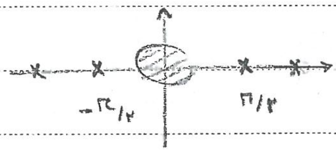
مثال:

$$\oint_{|z|=1} tg\,z\,dz=0$$

$$tg\,z=\frac{\sin z}{\cos z}$$

صورت تحلیلی، مخرج تحلیلی

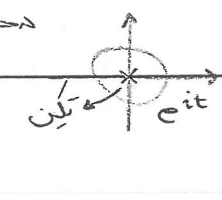
⇐ $tg\,z$ همه جا تحلیلی به جز صفرهای مخرج (صفرهای $\cos z$)



* قضیه انتگرال کوشی شرط کافی است نه لازم. مثلاً:

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2}\,dz=0$$

ولی $f(z)$ در دایره تحلیلی نیست



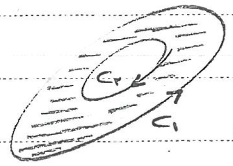
$$\begin{cases} f=\frac{1}{z^2} \\ dz=z'\,dt \end{cases}$$

$$\underset{z'=ie^{it}}{\overset{z(t)=e^{it}}{=\!=}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2it}}\, i e^{it}\,dt \overset{\text{اویلر}}{=} 0$$

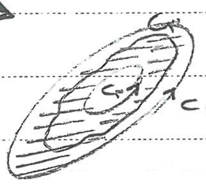
Subject
Date

* اگر جهت مرز داخلی را برعکس کنیم، انتگرال ها برابرند

$$\int_{C_1} + \int_{C_2} = 0$$



⇒



$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

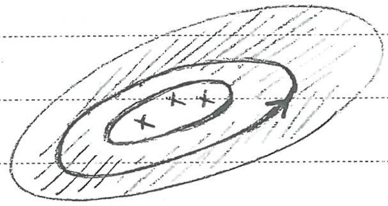
اگر منحنی سومی بین آن ها بکشیم $= \int_{C_3} f(z)\,dz$

بین C_1 و C_3 و C_3 و C_2 هم تحلیلی است

← اصل تغییر شکل پیوسته:

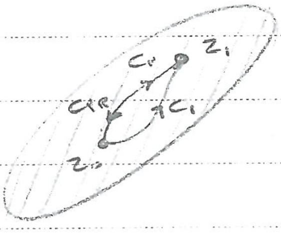
تا جایی که به نقاط تکین نخوردیم، انتگرال ها برابر

(x)



استقلال از مسیر: اگر $f(z)$ در یک ناحیه همبند ساده تحلیلی باشد،

انتگرال مستقل از مسیر است



$$\underset{C_1}{\int_{z_0}^{z_1}} f(z)\,dz = \underset{C_2}{\int_{z_0}^{z_1}} f(z)\,dz$$

اثبات: $\int_{C_1} + \int_{C_{2R}} = 0$ ($\int_{C_{2R}} = -\int_{C_2}$) طبق قضیه کوشی

$$\Rightarrow \int_{C_1} = \int_{C_2}$$

Subject

Date

* قضیه (انتگرال نامعین) اگر $f(z)$ در یک ناحیه همبند ساده و مرز آن تحلیلی باشد

آنگاه $F(z)$ موجود است و تحلیلی $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z)$

به طوری که

$$f(z) = F'(z)$$

و نیز $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$

ج $\int_{-\pi i}^{\pi i} \cos z\,dz$ $\cos z$ تابع تام است و $f(z)$ همه جا تحلیلی است

پس مستقل از مسیر است $\overset{\text{تحلیلی}}{=} \sin z \Big/_{-\pi i}^{\pi i}$

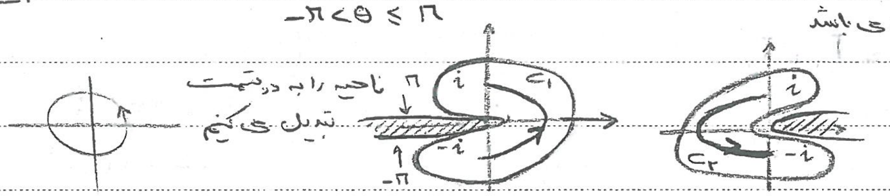
$$= 2\sin \pi i = 2i \sinh \pi = 0 + (2\sinh \pi)\, i$$

ج $\oint \frac{dz}{z} = ?$

$|z| = 1$

$-\pi < \theta \le \pi$ Branchcut توابع نقطه تکین می‌باشد

برای تک مقداری کردن



$0 < \theta \le 2\pi$

$I_1 = \int_{-i}^{i} \frac{1}{z}\,dz \overset{\text{تحلیلی}}{=} \ln z \Big/_{-i}^{i}$ $\qquad I_2 = \ln z \Big/_{i}^{-i}$

C_1 $= \ln i - \ln(-i)$ $\qquad = \ln(-i) - \ln i$

$= \frac{\pi}{2} i - (-\frac{\pi}{2} i) = \pi i$ $\qquad = \frac{3\pi}{2} i - \frac{\pi}{2} i = \pi i$

$$I = I_1 + I_2 = 2\pi i$$

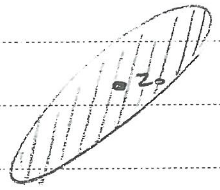
Subject

Date

* قضیه: اگر $f(z)$ در یک ناحیه همبند ساده و مرز آن تحلیلی باشد و z_0 نقطه‌ای داخل ناحیه باشد، آنگاه

$f^{(n)}(z_0)$ از همه مراتب موجود است

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C \atop c.c.w} \frac{f(z)\, dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$



* قضیه فرمول انتگرال کوشی $(n=0)$

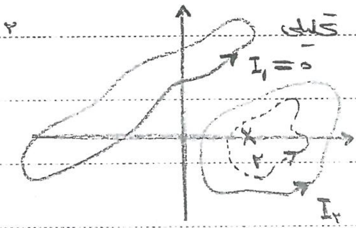
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

روی C مسیرهای بسته

$$\oint \frac{e^z}{z-2}\, dz = ?$$

$z_0 = 2$

$I = I_1 + I_2$



$I_2 = 2\pi i\, f(z_0)$

$= 2\pi i\, e^2$

Subject
Date

«سری های مختلط»

$$S(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z)+f_2(z)+\dots$$

$$\begin{cases} S_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\dots+f_n(z) & \text{(مجموع جزئی n ام)} \\ R_n(z)=f_{n+1}(z)+\dots = S(z)-S_n(z) & \text{(باقی مانده سری)} \end{cases}$$

z ورودی
$S(z)$ خروجی

✓ ناحیه همگرایی = مجموعه نقاطی که سری به ازای آن ها همگرا است (z)

✓ همگرایی مطلق = اگر $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$ همگرا باشد (اگر سری $\sum f_n(z)$ همگرای مطلق باشد آنگاه به طور مشروط هم همگرا است)

✓ همگرایی مشروط = اگر $\sum f_n(z)$ همگرا باشد اما همگرای مطلق نباشد

* تست همگرایی (تست نسبت)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| \begin{cases} <1 & \text{همگرای مطلق} \\ >1 & \text{واگرا} \\ =1 & \text{fail} \end{cases}$$

«سری های توانی»

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$$

$\sum f_n(z)$ $\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right|<1 \Rightarrow \lim\left|\frac{c_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{c_n(z-z_0)^n}\right|<1$ همگرایی

$$\Rightarrow |z-z_0| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

(R) شعاع همگرایی

PAPCO

| Subject
| Date

حالات همگرایی سری توانی:

- نقطه z_0 همگراست $(R=0)$
- $|z-z_0|<R$ همگرای مطلق (روی مرز نامعلوم)
- همه جای صفحه z همگراست $(R=\infty)$

مثال: $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,z^n$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=0$$

نقطه $z_0=0$ همگراست

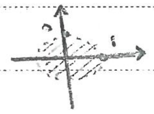
مثال: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\infty$$

همه جا به طور مطلق همگراست

مثال: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=1 \Rightarrow |z|<R=1$$



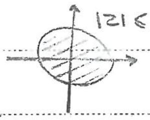
برای روی مرز $|z|=1$: $\sum |z^n| = \sum 1$ واگرا، نه همگرایی مطلق و نه مشروط دارد

مثال: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n^2$

$R=1$

$$\sum\left|\frac{z^n}{n^2}\right| \overset{|z|=1}{=\!=} \sum\frac{1}{n^2}$$

$|z|\le 1$



همگرایی مطلق

برای روی مرز ؟

روی مرز همگرای مطلق است پس همگرای مشروط هم دارد

مثال: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/n}{1/(n+1)}\right|=1$$

برای همگرایی مطلق روی مرز ؟

$$\sum\left|z^n/n\right| \overset{|z|=1}{=\!=} \sum\frac{1}{n} \quad \text{واگرا}$$

پس روی مرز همگرایی مطلق ندارد

برای همگرایی مشروط روی مرز ؟ نمونه میدهیم

$z=1$: $\sum 1^n/n = \sum 1/n$ واگرا

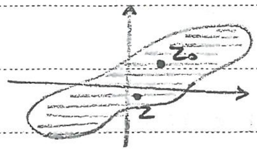
$z=-1$: $\sum (-1)^n/n$ همگرا — جاهایی همگرایی مشروط دارد

جاهایی ندارد

Subject
Date

« سری تیلور »

اگر $f(z)$ در یک ناحیه همبند ساده تحلیلی باشد و z و z_0 داخل ناحیه باشند:



$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \dots$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$ سری توانی

* اگر $z_0=0 \Leftarrow$ سری مکلوران

مشتق و انتگرال جمله به جمله از سری تیلور مجاز است. (داخل دایره همگرایی)

بسط مکلوران $f(z)=e^z$ ؟ (حول $z_0=0$)

$$f^{(n)}(z_0) = e^0 = 1$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \infty$$

* $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(با جایگذاری $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$)

* $\cos z = \sum \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$

« روشی برای یافتن شعاع همگرایی سری تیلور »

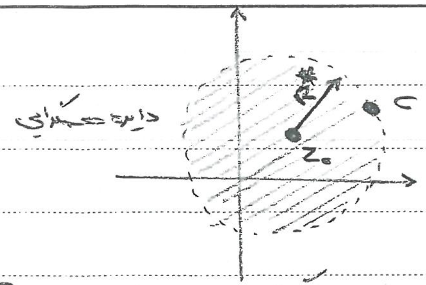
روش ۱) $f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

چون سری توانی است $\hookleftarrow R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \Rightarrow |z-z_0| < R$

دایره همگرایی

PAPCO

روش 2) اگر c نزدیک‌ترین نقطه تکین $f(z)$ به z_0 باشد



$$R^* = |z_0 - c| \qquad |z - z_0| < |z_0 - c|$$

* اگر R^* کوچکتر از R باشد، R^* جواب است. پس R و R^* سری همگرا است در $f(z)$

در مورد e^z چون تکین ندارد، دایره تا ∞ می‌رود

«بسط دوجمله‌ای»

$$(s+t)^n = s^n + n s^{n-1} t + \frac{n(n-1)}{2!} s^{n-2} t^2 + \dots$$

حالت همگرایی:

- $|s| > |t|$ به ازای همه n ها عبارت فوق صادق است
- $|s| < |t|$ فقط اگر n عدد مثبت صحیح باشد درست است. غیر آن واگراست
- $|s| = |t|$ به ازای n صحیح مثبت صادق است. غیر آن غلط است

ج) سری تیلور $f(z) = \frac{1}{1-z}$ را پیدا کنید و در مورد همگرایی آن بحث کنید

جایی توان سری نوشت که تابع تحلیلی باشد پس داخل دایره یک می‌توانیم سری بنویسیم

مشتق گرفتن سخت است پس از قضیه بسط بالا استفاده می‌کنیم

$(-z)$ می‌تواند اول باشد

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = (1 + (-z))^{-1} \qquad 1 > |z| \Rightarrow |z| < 1$$

$$= 1 + z + z^2 + \dots = \sum z^n$$

Subject
Date

$$\frac{1}{1-z}=\sum z^n$$

برای همگرایی : روش 1) چون سری توانی است $|z|<1 \Rightarrow R=1$

روی مرز همگرا نیست

روش 2) $z=1$ تکین است

$R^*=1 \Leftarrow |z|<1$ دایره همگرایی است

روش 3) با توجه به بسط دوجمله‌ای

$|z|<1$

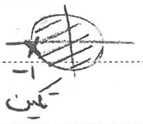
ج) سری مکلورن $f(z)=\frac{1}{1+z}$ می‌دانیم $\frac{1}{1-z}=\sum z^n$

$z\to -z$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+z}=\sum (-1)^n z^n$$

برای همگرایی $R=1$

$R^*=1$



$|-z|<1$

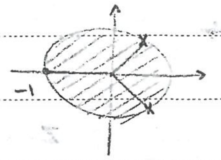
ج) سری مکلورن $f(z)=\frac{1}{1+z^3}$

$z\to z^3$

$$f(z)=\sum (-1)^n z^{3n}$$

همگرایی :

ریشه‌های سوم -1



$z^3=-1$

$$W_k=1e^{\left(\theta/n \pm \frac{2k\pi}{3}\right)} \qquad \theta=\pi$$

Subject
Date

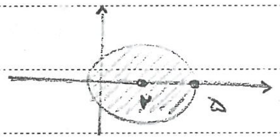
سری تیلور تابع $f(z) = \frac{1}{5-z}$ را حول $z_0 = 2$ بیابید

پس ترم‌های $(z-2)$ را ایجاد می‌کنیم

$$f(z) = \frac{1}{(5-2)-(z-2)} = \frac{1}{3-(z-2)} = \frac{1}{3\left(1-\frac{z-2}{3}\right)} = \frac{1}{3}\sum\left(\frac{z-2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{3^{n+1}}$$

$$\uparrow \quad \frac{1}{1-z} = \sum z^n$$

برای همگرایی: نقطه تکین $z=5$ و $z_0=2$



از راه نقطه تکین $R^* = 3$ به مرکز z_0

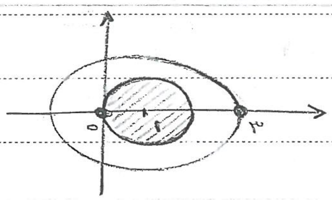
از راه بسط $|z|<1 \Rightarrow \left|\frac{z-2}{3}\right|<1 \Rightarrow |z-2|<3$

از راه سری توانی R به دست می‌آید

سری تیلور $f(z)$ را حول $z=1$ بیابید $\quad f(z) = \frac{3}{3z-z^2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{3-z}$

$$f(z) = \frac{1}{1+(z-1)} + \frac{1}{2-(z-1)} = \sum(-1)^n(z-1)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{z-1}{2}\right)}\right)$$

$$f = \sum(-1)^n(z-1)^n + \sum\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$$



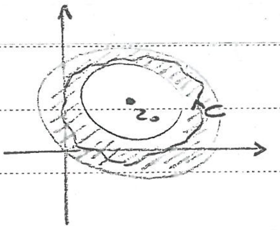
همگرایی کل $|z-1|<1$

(اشتراک)

Subject
Date

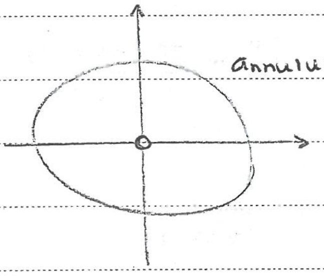
« سری لاران »

اگر $f(z)$ در یک Annulus به مرکز z_0 تحلیلی باشد و c منحنی باشد که باید داخل را دربرگیرد



$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}^{c.c.w} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$



$$f(z)=\frac{\sin z}{z^2}$$

بسط حول $z=0$

حول صفر تیلور نمی‌دهد (در صفر تحلیلی نیست)
باید از لاران استفاده کنیم

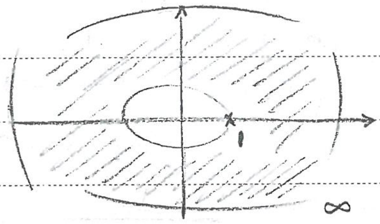
سری تیلور $\sin z$ را می‌نویسیم

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\sum \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{1}{z^2}\left(z-z^3/3!+\cdots\right)$$

ج)

$$f(z)=\frac{1}{1-z} \qquad |z|>1$$



باید لاران را بنویسیم

از بسط ترجمه‌ای استفاده می‌کنیم

$$((-z)+1)^{-1} \overset{|z|>1}{=\!=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{z^{n+1}}$$

$|z|<1 \xrightarrow{z\to\frac{1}{z}} \left|\frac{1}{z}\right|<1$, $|z|>1$

راه دیگر:

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}\,\frac{1}{1/z-1}=\frac{1}{z}\,\frac{-1}{1-\frac{1}{z}} \overset{\frac{1}{1-z}=\sum_0^\infty z^n}{=\!=} \frac{-1}{z}\sum\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{z^{n+1}}$$

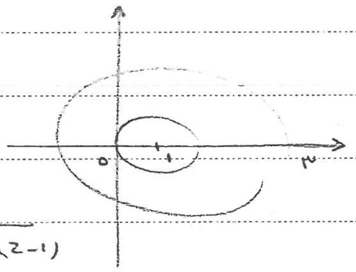
Subject

Date

$$\frac{1}{1+z}=\sum(-1)^n z^n$$

بسط حول $z_0=1$ ؟

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-3}$$



$|z-1|<1 \Rightarrow f(z)=\frac{1}{1+(z-1)}+\frac{1}{-2+(z-1)}$

هر دو تیلور

$$=\sum(-1)^n(z-1)^n+\frac{-1}{2\left(1-\left(\frac{z-1}{2}\right)\right)}$$

$$=\sum(-1)^n(z-1)^n+\sum\frac{-(z-1)^n}{2^{n+1}}$$

$1<|z-1|<3 \Rightarrow f(z)=\frac{1}{1+(z-1)}+\frac{1}{-2+(z-1)}$

اولی لوران

دومی تیلور

$$=\frac{1}{(z-1)\left(\frac{1}{z-1}+1\right)}+\frac{1}{-2+(z-1)}$$

$$=\frac{1}{z-1}\sum(-1)^n\frac{1}{(z-1)^n}+\sum\frac{-(z-1)^n}{2^{n+1}}$$

$|z-1|>3 \Rightarrow f(z)=\sum(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+1}}+\frac{1}{-2+(z-1)}$

هر دو لوران

$$\frac{1}{(z-1)\left(\frac{-2}{z-1}+1\right)}=\frac{1}{z-1}\sum(-1)^n\left(\frac{-2}{z-1}\right)^n$$

Subject
Date

$f(z) = \dfrac{1}{2-z}$

حول $z_0 = 0$ بسط

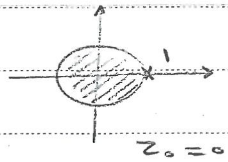
$\dfrac{1}{1-z} = \sum z^n$

$|z|<1$: $\dfrac{1}{2(1-\frac{z}{2})}$ کلی است بسط تیلور می‌نویسیم

$\sum \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{2^{n+1}}$

$|z/2|<1 \Rightarrow |z|<2$ داخل دایره



$z_0 = 0$

$|z|>1$: $\dfrac{1}{z(2/z-1)} = \dfrac{-1}{z(1-2/z)} = \dfrac{-1}{z}\sum\left(\frac{2}{z}\right)^n$ لوران

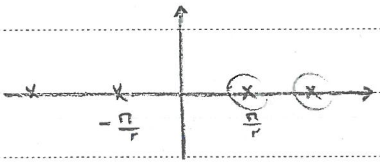
$= \sum \dfrac{-2^n}{z^{n+1}}$

خارج دایره $|\frac{2}{z}|<1 \Rightarrow |z|>2$

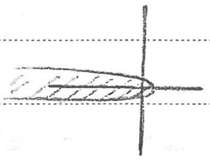
«انواع نقاط تکین»

$tg\, z$ در صفرهای $\cos z$ نقطه تکین دارد

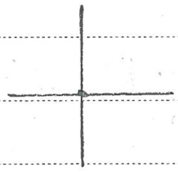
$\sin\frac{1}{z}$ ، $\cos\frac{1}{z}$ در صفر تکین تنها دارند



تکین های تنها



تکین گسترده



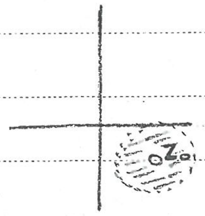
«دسته‌بندی نقاط تکین تنها»

$tg\frac{1}{z}$ در صفر تکین گسترده دارد

$tg\frac{1}{z} = \dfrac{\sin 1/z}{\cos 1/z}$

در صفر ∞ نقطه تکین کن رهم هستند

۱) قطب : اگر سری لوران $f(z)$ که در همسایگی بلافصل z_0 (محذوف) (تکین تنها) می‌نویسیم، تعداد متناهی توان منفی دارد



$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

m قطب مرتبه

$0<|z-z_0|<\rho$

۲) تکین اساسی : اگر ∞ توان منفی داشت

$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

۳) تکین رفع‌شدنی : اصلا توان منفی ندارد

PAPCO

(قطب) اندازه تابع به ∞ میل می‌کند $z \to z_0$

(تکین رفع‌شدنی) اندازه به عدد $z \to z_0$

(تکین اساسی) هرحالت

به قطب مرتبه ۱ قطب ساده می‌گوییم

Subject

Date

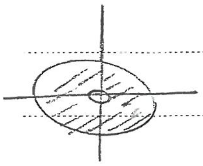
* تکین تنها فقط دسته بندی می‌کنیم. تکین گسترده دسته بندی نمی‌شود

ج: نقاط تکین را دسته بندی کنید

$$\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right)$$

سری لوران را حول همسایگی با فاصله صفری نویسیم

قطب مرتبه ۳



$z \to 0$ اندازه به ∞ میل می‌کند

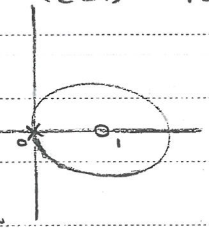
ج: تکین $z=1$ را دسته بندی کنید

$$\frac{1}{z(z-1)^3} = \frac{1}{(z-1)^3}\left(\frac{1}{1+(z-1)}\right)$$

$$= \frac{1}{(z-1)^3}\sum (-1)^n (z-1)^n$$

$$= \frac{1}{(z-1)^3}\left(1-(z-1)+(z-1)^2+\cdots\right)$$

قطب مرتبه ۳



صفر و یک تکین هستند

بر اساس اکثر دایره به این شکل است

لوران حول $z=1$ در همسایگی با فاصله را می‌نویسیم

$z \to 1$ اندازه به ∞ میل می‌کند

ج: تکین $z=0$ $\quad e^{1/z}$

می‌دانیم $e^z = \sum \frac{z^n}{n!} \xrightarrow{z \to \frac{1}{z}} e^{1/z} = \sum \frac{(1/z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!}$

تکین اساسی.

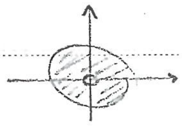
($\sin\frac{1}{z}$ و $\cos\frac{1}{z}$ تکین اساسی است $z=0$)

ج:

$\frac{\sin z}{z}$ $\quad z=0$ تکین تنها

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)$$

توان منفی ندارد — تکین رفع شدنی



$z \to 0$ اندازه تابع به عدد میل می‌کند

ج: * $tg\frac{1}{z}$ صفر تکین گسترده

این دسته بندی ندارد

۱۸ دی تاریخ امتحان

Subject
Date

* اگر $f(z_0)=0$ ، به z_0 صفر تابع گوییم.

* اگر به جز $f(z_0)$ ، $f'(z_0)$ ، ... ، $f^{(n-1)}(z_0)$ صفر باشد ، به z_0 صفر مرتبه n گوییم

؟ صفرهای e^z — صفر ندارد

؟ $\sin z$ — ۱ — $k\pi$ — مرتبه یک — صفر ساده

؟ $(\sin \pi z)^4$ — صفر مرتبه ۴ — مشتقش تا سه بار $\sin z$ در آن است

؟ $(1+z^5)$ — صفر مرتبه یک

ریشه‌های ۱- ، صفرهای z^4 نیستند

؟ $(1+z^5)^2$ — صفر مرتبه دو

؟ $(1-\cos z)$ — صفر مرتبه دو — 2π صفر $\sin$ هم هست

؟ $(1-\cos z)^2$ — صفر مرتبه چهار

* قضیه: اگر در $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ ، $p(z)$ ، $q(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی باشد و z_0 صفر مرتبه m صورت و صفر مرتبه n مخرج باشد و $n>m$ در این صورت تابع $f = \frac{p}{q}$ در z_0 قطب مرتبه $(n-m)$ دارد

؟ چه صفر چه نوع تکینی دارد؟

$\frac{\cos z}{z^3}$ → صفر صورت نیست $z=0$ → $m=0$

→ $n=3$

تکین $z=0$

$$= \frac{1}{z^3}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \dots\right)$$

قطب مرتبه ۳

؟ $\frac{\sin z}{z^3}$ — $m=1$ ، $n=3$ — قطب مرتبه ۲

$$\frac{1}{z^3}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\right)$$

ضرب کنیم ، بالاترین توان ۲ است

PAPCO

ج) در $z=1$

$$\frac{z-1}{(z-1)^3} \qquad \begin{matrix} m=1 \\ n=3 \end{matrix} \qquad = \frac{1}{(z-1)^2}$$

قطب مرتبه ۲

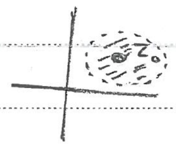
$$= \frac{1}{z-1} + 0 + 0 + \cdots$$

« Residue Integration »

انتگرال باقیمانده‌ای

* تعریف باقیمانده: به ضریب a_{-1} در سری لوران تابع $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ در همسایگی بلافصل z_0 (تکین تنها) باقیمانده تابع در z_0 گوییم.

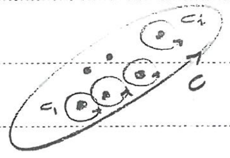
$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}$$



$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

z_0 تکین تنها در همسایگی بلافصل

* قضیه باقیمانده: اگر C یک منحنی ساده بسته باشد و $f(z)$ در آن و بر آن تحلیلی باشد به جز تعداد متناهی تکین تنها در داخل ناحیه



$$\oint_{C \; c.c.w} f(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z)$$

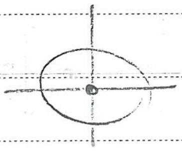
$$\oint_C f\,dz = \sum \oint_{C_i} f\,dz = 2\pi i \sum \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} f\,dz}$$

قضیه انتگرال کوشی — a_{-1} ها، باقیمانده‌ها

Subject
Date

$$\oint_{\substack{c.w \\ |z|=1}} \frac{\sin z}{z^4}\, dz$$

$$I \overset{c.w}{=} (-)\,2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{\sin z}{z^4}\right) = -2\pi i\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{\pi i}{3}$$

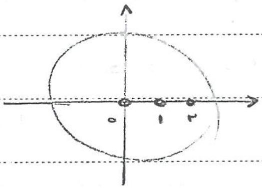


$\frac{\sin z}{z^4}$ سری لوران $\qquad \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(z - z^3/3! + \cdots\right) \qquad \operatorname*{Res}_{z=0} = \frac{-1}{6}$

ضریب $\frac{1}{z}$

$$\oint_{\substack{|z|=4 \\ c.c.w}} \left(\frac{2}{z} - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}\right) dz = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{2}{z}\right) + \operatorname*{Res}_{z=1}\left(\frac{-1}{z-1}\right) + \operatorname*{Res}_{z=2}\left(\frac{-1}{z-2}\right)\right)$$

۳ Res دارد



$\operatorname*{Res}_{z=0} = 2 \qquad \operatorname*{Res}_{z=1} = -1 \qquad \operatorname*{Res}_{z=2} = -1$

$$\Rightarrow I = 2\pi i(2-1-1) = 0$$

خودش به فرم $\frac{1}{z}$ است
لورانش خودش می‌شود.
در ۲ تای دیگر هم تحلیلی هستند

$$\oint_{\substack{|z|=2 \\ c.c.w}} \frac{1}{z-1}\, dz = 2\pi i(1) = 2\pi i$$

$$\oint_{\substack{|z|=\frac{1}{2} \\ c.c.w}} \frac{1}{z(z-1)}\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} = 2\pi i(-1) = -2\pi i$$

خارج دایره

پس تنها $z=0$ تکین

$$\frac{1}{z}\left(\frac{-1}{1-z}\right) = \frac{-1}{z}\sum z^n = -\frac{1}{z}(1+z+z^2+\cdots)$$

یا $a_{-1} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z(z-1)}\, z = -1$

Subject
Date

$tg\frac{1}{z}$ $\underset{z=0}{Res}$ اگر تکین تنها نشود ⟵ Res ندارد

اول تشخیص می‌دهیم تکین چه نوعی است

* روش های محاسبه Res : (تکین تنها)

۱) رفع شدنی : $[Res = 0]$ (راه تشخیص رفع شدنی $\lim_{z\to z_0}$ عدد شود)

۲) تکین اساسی : روش ساده ندارد   سری لوران می‌نویسیم

۳) قطب ساده (مرتبه ۱) :

$$\left[\underset{z=z_0}{Res} f(z) = a_{-1} = \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)\right]$$

$$f(z) = a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

$$f(z)(z-z_0) = a_{-1} + a_0(z-z_0) + \cdots$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0) = a_{-1}$$

قضیه (روش دوم محاسبه Res در قطب ساده) : اگر $f(z)=\frac{h(z)}{g(z)}$ و در z_0 $\begin{cases} h(z_0)\neq 0 \\ g(z_0)=0 \end{cases}$

و z_0 قطب ساده باشد آنگاه

$$\left[Res = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}\right]$$

$$Res = \lim_{z\to z_0} \frac{h(z)(z-z_0)}{g(z)} \overset{Hop}{=} \lim_{z\to z_0} \frac{h'(z)(z-z_0)+h(z)}{g'(z)} = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

۴) قطب مرتبه ۲ :

$$\left[a_{-1} = \lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}\left(f(z)(z-z_0)^2\right)\right]$$

$$f(z) = a_{-2}(z-z_0)^{-2} + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + \cdots$$

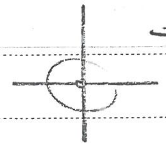
$$f(z)(z-z_0)^2 = a_{-2} + a_{-1}(z-z_0) + \cdots$$

۵) قطب مرتبه m :

$$\left[a_{-1} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(f(z)(z-z_0)^m\right)\right]$$

Subject
Date

$$\oint_{\substack{|z|=1 \\ c.c.w}} \frac{\sin z}{z^2}\,dz = 2\pi i\,(1) = 2\pi i$$ ج



$z=0$ تکین تنهاست

صفر مرتبه ۱ صورت
صفر مرتبه ۲ مخرج $\Rightarrow$ قطب مرتبه ۱

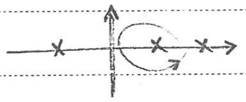
$$\text{Res} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z^2}\, z = 1$$

روش دوم کار نمی کند

$$\oint_{\substack{|z-\frac{\pi}{2}|=\frac{1}{8} \\ c.c.w}} tg\, z\, dz$$ ج

تکین‌ها صفرهای cos هستند

$$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} tg\, z = -2\pi i$$



$$tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

صفر صورت نیست
صفر مرتبه ۱ مخرج است — قطب مرتبه ۱

$$\text{Res} = \lim_{z\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{\cos z}\left(z-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{\sin \pi/2}{-\sin \frac{\pi}{2}} = -1$$

$$\oint \frac{1}{\cos z\,(z-\frac{\pi}{2})}\,dz$$ ج

$\frac{\pi}{2}$ تکین قطب مرتبه ۲ $\Longrightarrow$ Res از رابطه قطب مرتبه ۲

$\frac{3\pi}{2}$ تکین قطب مرتبه ۱

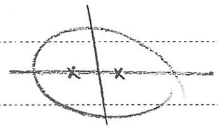
PAPCO

Subject

Date

$f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2(z+1)^3}$ $\qquad \oint_{|z|=5} f(z)\,dz = ?$ ج

$z=1$, $z=-1$ هر دو در دایره هستند



$z=1$ تکین مرتبه ۲

$z=-1$ تکین مرتبه ۳

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z+1)^3}\right) = -\frac{1}{16}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f = \lim_{z\to -1} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) = \frac{1}{16}$$

$\Rightarrow I = 0$

$\oint_{|z|=1} z^2 e^{1/z}\,dz$ ج

$z=0$ تنها تکین اساسی

باید سری لوران را بنویسیم

$$e^z = \sum \frac{z^n}{n!} \Rightarrow e^{1/z} = \sum \frac{1}{z^n\, n!}$$

Subject
Date

«انتگرال های حقیقی»

$\int_0^{2\pi} F(\sin\theta , \cos\theta)\, d\theta$ F گویا

$$\overset{\text{اویلر}}{=} \int_0^{2\pi} F\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} , \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right) d\theta$$

تغییر متغیر

$$\begin{cases} e^{i\theta} = z \Rightarrow dz = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta \\ \theta : 0-2\pi \Rightarrow z = e^{i\theta} \end{cases}$$

دایره یک

$$I = \oint_{\substack{|z|=1 \\ c.c.w}} F\left(\frac{z-1/z}{2i} , \frac{z+1/z}{2}\right)\frac{dz}{iz} = \oint f(z)\, dz = 2\pi i \sum Res$$

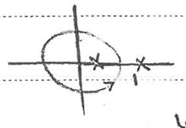
جواب حقیقی است

ج)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}} = \oint_{\substack{|z|=1 \\ c.c.w}} \frac{1}{\sqrt{2} - \frac{z+1/z}{2}} \frac{dz}{iz}$$

$$\begin{cases} e^{i\theta} = z \\ d\theta = dz/iz \end{cases}$$

$$= \frac{-2}{i} \oint_{\substack{|z|=1 \\ c.c.w}} \frac{1\, dz}{(z-(\sqrt{2}-1))(z-(\sqrt{2}+1))} \quad = f(z)\, dz$$



یکی از قطب ها
خارج دایره است

$$= -\frac{2}{i}\, 2\pi i \underset{z=\sqrt{2}-1}{Res} f(z) = 2\pi$$

$z=\sqrt{2}-1$ قطب ساده   صفر صورت نیست
صفر مرتبه ۱ مخرج

$$Res = \lim_{z\to\sqrt{2}-1} \frac{1}{(z-(\sqrt{2}+1))} = -\frac{1}{2}$$

ولی اگر حدودش موجود باشد با PV برابر می‌شود $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ موجود نیست و $PV\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = 0$

Subject

Date

انتگرال ناسره

انتگرال ناسره نوع اول

$$* \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{R_1\to\infty \\ R_2\to\infty}} \left(\int_{-R_1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{R_2} f(x)\,dx \right) = \lim_{R_1, R_2\to\infty} \left[\int_{-R_1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{R_2} f(x)\,dx \right]$$

مقدار اصلی

$$* \quad P.V\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{R} f(x)\,dx \right)$$

انتگرال ناسره نوع دو

$f(a) = \infty$

$A \le a \le B$

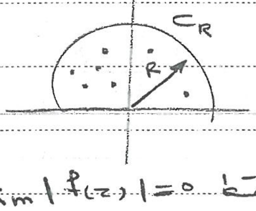
$$\int_{A}^{B} f(x)\,dx = \lim_{\delta_1, \delta_2\to 0} \left[\int_{A}^{a-\delta_1} f(x)\,dx + \int_{a+\delta_2}^{B} f(x)\,dx \right]$$

$$P.V\int_{A}^{B} f\,dx = \lim_{\delta\to 0} \left[\int_{A}^{a-\delta} f\,dx + \int_{a+\delta}^{B} f\,dx \right]$$

* قضیه: اگر $f(z)$ تابعی باشد که در نیم‌صفحه بالا تعداد متناهی تکین داشته باشد و هیچ یک روی محور x نباشد آنگاه اگر $\lim\limits_{\substack{|z|=R \\ R\to\infty}} |z f(z)| = 0$ شود (مطابق شکل) خواهیم داشت

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\text{UPP}} \text{Res}\, f(z)$$

نیم‌صفحه بالا



برای نقاط $\lim\limits_{\substack{|z|=R \\ R\to\infty}} |f(z)| = 0$ آنگاه

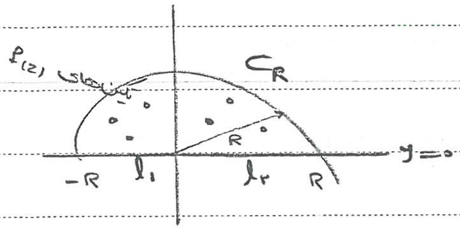
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx}\,dx = 2\pi i \sum_{\text{UPP}} \text{Res}\left(f(z)e^{imz}\right)$$

Subject

Date

اثبات: قدم اول) یک نیم دایره در نظر می‌گیریم که همه تکین‌ها را در برگیرد

قدم دوم) قضیه مانده



$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\text{نیم صفحه بالا}} \operatorname{Res} f(z)$$

قدم سوم) از معادله قبل حد می‌گیریم، $R \to \infty$

$$\underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx}_{=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx} + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz \to 0 = 2\pi i \sum_{UPP} \operatorname{Res} f(z)$$

اگر $\lim_{\substack{|z|=R \\ R\to\infty}} |z f(z)| = 0$ ⟸ ترم دوم صفر می‌شود و قضیه اثبات می‌شود

اثبات می‌شود وقتی $f(z)$ روی محور x تکین ندارد، خود انتگرال موجود و مساوی P.V آن است

اثبات قسمت دوم:

$$\int_{-R}^{R} f(x) e^{imx}\,dx + \int_{C_R} f(z) e^{imz}\,dz = 2\pi i \sum_{UPP} \operatorname{Res} f(z) e^{imz}$$

$$\underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x) e^{imx}\,dx}_{=\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{imx}\,dx} + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) e^{imz}\,dz \to 0 = 2\pi i \sum_{UPP} \operatorname{Res}\left(f(z) e^{imz}\right)$$

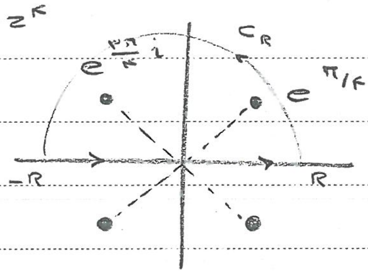
اگر $\lim_{\substack{|z|=R \\ R\to\infty}} |f(z)| = 0$ ⟸ آنگاه ترم دوم حذف می‌شود

Subject
Date

ج

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} \xrightarrow{\text{زوج}} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^4} = 2\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$$

$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ تکین‌ها ریشه‌های چهارم 1- هستند



وقتی z را در آن ضرب کردیم

* در کسری‌ها اگر درجه مخرج از صورت ۲ (یکی) بیشتر باشد صفری شود

$$\lim_{\substack{|z|=R \\ R\to\infty}} \left|\frac{z}{1+z^4}\right| = 0 \qquad \frac{\cos z}{z^3}$$

$$\lim = \lim_{R\to\infty} \frac{|z|}{|1+z^4|}$$ با نامساوی مثلث

پس شرط قضیه را داریم پس

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^4} + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \sum Res$$ (0)

$$\Leftarrow \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^4} + \int \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \sum Res$$

$e^{\frac{\pi}{4}i}$: $Res\left|\frac{1}{1+z^4}\right| = \lim_{z\to e^{\pi/4 i}} \frac{1}{1+z^4}(z - e^{\frac{\pi}{4}i}) \overset{Hop}{=\!=}$ ...

تکین تنها قطب ساده

$$= \frac{1}{4z^3}\Big|_{e^{\pi/4 i}} = \frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i} = -\frac{1}{4}e^{\pi/4\, i}$$

$e^{\frac{3\pi}{4}i}$: $Res = \frac{1}{4z_0^3} = \frac{1}{4}e^{-9\pi/4\, i} = \frac{1}{4}e^{-\pi/4\, i}$

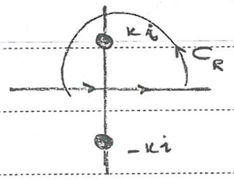
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i\left(\frac{e^{-\pi/4\, i} - e^{\pi/4\, i}}{4}\right) = \pi \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$ حقیقی

Subject
Date

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{k^2+x^2}\,dx = ?$$ چ

$$f(z) = \frac{\cos mz}{k^2+z^2}$$



تکین ها $\pm ki$

روی محور x تکین نداریم و همچنین

$$\lim_{\substack{|z|=R \\ R\to\infty}} \left|\frac{z\cos mz}{k^2+z^2}\right| \neq 0 \quad , \quad \lim_{|z|=R} \left|\frac{\cos mz}{k^2+z^2}\right| = 0$$

درجه مخرج بیشتر است

پس باید یک ترم نمایی در آن ضرب کنیم ولی نمی توانیم I را بدست آوریم پس به جای $\cos mx$ ، e^{imx} می گذاریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{k^2+x^2}\,dx = ?$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{k^2+x^2}\,dx + \lim \int_{C_R} \frac{e^{imz}}{k^2+z^2}\,dz = 2\pi i \sum_{UPP} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{imz}}{k^2+z^2}\right)$$

(the limit term → 0)

$$\operatorname{Res}_{ki}\left(\frac{e^{imz}}{k^2+z^2}\right) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \frac{e^{imz}}{2z}\Big/_{ki} = \frac{e^{im(ik)}}{2ki} = e^{-mk}/2ki$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imz}}{k^2+x^2}\,dx = 2\pi i\left(\frac{e^{-mk}}{2ki}\right) = \frac{\pi}{k} e^{-mk}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx + i\sin mx}{k^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{k} e^{-mk} + 0i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{k^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{k} e^{-mk} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mx}{k^2+x^2}\,dx = 0 \end{cases}$$

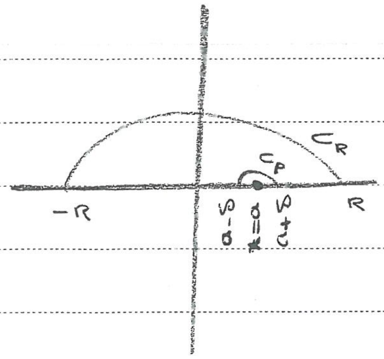
PaPCO

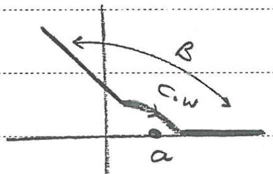
Subject
Date

انتگرال غلط حقیقی
تغییر متغیر — res

(اگر تکین روی محور حقیقی داشتیم)

* قضیه: اگر C_ρ کمان دایره به مرکز $x=a$ و شعاع ρ باشد آنگاه





✓ اگر $f(z)$ در $z=a$ قطب ساده

$$\lim_{\substack{|z-a|=\rho \\ \rho\to 0 \\ c.w}} \int_{C_\rho} f(z)\,dz = -\beta i \operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$$

✓ اگر $\lim\limits_{\substack{|z-a|=\rho \\ \rho\to 0}} |z f(z)| = 0$ آنگاه $\lim \int_{C_\rho} f(z)\,dz = 0$

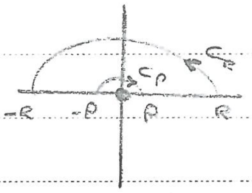
داشتیم

نتیجه: $p.v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i\sin x}{x}\,dx = 0 + \pi i \Rightarrow \begin{cases} p.v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{x} = \pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \\ p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx = 0 \end{cases}$

خود انتگرال موجود نیست

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = ?$$

چ
ناسره نوع اول و دوم



$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i\sin x}{x}\,dx \rightsquigarrow I ✓$$

$$\lim_{\substack{|z|=R \\ R\to\infty}} |z f(z)| \neq 0$$

پس ابتدا $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx$ را حساب می‌کنیم

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \rho\to 0}} \left[\int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\rho}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz \right] = 2\pi i \sum_{upp} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}\right)$$

چون تکینی بالا نیست
ممکن است در بالا تکین داشته باشیم

$$\Rightarrow p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \lim_{\rho\to 0} \int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

$\pi i \operatorname{Res} = \pi i$; c.w: $-\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}(e^{iz}/z)$; $\operatorname{res} = \frac{e^0}{1} = 1$

اگر چند تکین روی محور افقی داشتیم